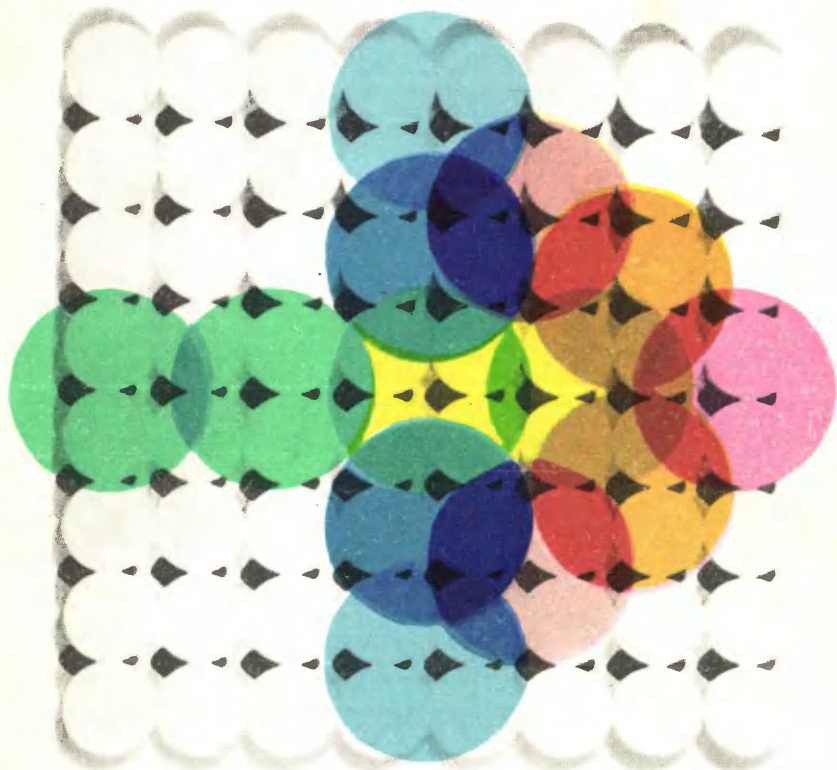




КИБЕРНЕТИКА



А. П. СТАХОВ

КОДЫ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ

• КИБЕРНЕТИКА •

А. П. СТАХОВ

КОДЫ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ



МОСКВА «РАДИО И СВЯЗЬ» 1984

ББК 32.97

С11

УДК 681.335.087.92:681.325.53

Стахов А. П.

С11 Коды золотой пропорции. — М.: "Радио и связь", 1984. — 152 с., ил. — (Кибернетика)

40 к.

Книга знакомит с новым подходом к построению информационных и арифметических основ цифровой техники, вытекающим из теории кодов Фибоначчи и кодов золотой пропорции и построенных на их основе систем счисления. В простой форме излагаются свойства чисел и кодов Фибоначчи и золотой пропорции. Обсуждаются принципы использования избыточности рассматриваемых кодов в вычислительной, измерительной и информационно-регистрирующей технике.

Книга является логическим продолжением предыдущей книги автора "Введение в алгоритмическую теорию измерения" (1977 г.).

Для инженерно-технических работников в области цифровой вычислительной и измерительной техники, теории кодирования и цифровой обработки информации.

С $\frac{1502000000-064}{046(01)-84}$ 60-84

ББК 32.97
6Ф.7

Рецензенты: д-р техн. наук В. И. Мудров, д-р техн. наук Ю. М. Смирнов

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как известно, количество иррациональных (или несоизмеримых) чисел бесконечно. Однако некоторые из них занимают особое место в истории математики, более того — в истории материальной и духовной культуры человечества. Их значение состоит в том, что они выражают некоторые отношения, имеющие универсальный характер и обнаруживающиеся в самых неожиданных местах.

Первое из них — это иррациональное число $\sqrt{2}$, равное отношению диагонали к стороне квадрата. С этим числом связано открытие несоизмеримых отрезков и история наиболее драматичного периода в античной математике, который привел к разработке теории иррациональностей и иррациональных чисел и в конечном итоге — к созданию современной "непрерывной"* математики.

Следующие два иррациональных числа — это число π , выражающее отношение длины окружности к ее диаметру, и "неперово число" e . Между π и e , т. е. между "двумя числами, господствующими над анализом", существует изящное соотношение:

$$1 + e^{i\pi} = 0,$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Еще одно знаменитое иррациональное число — это золотое сечение или золотая пропорция

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398875 \dots,$$

которая возникает как результат решения геометрической задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, т. е. делении отрезка на две неравные части так, чтобы отношение большей части к меньшей равнялось бы отношению всего отрезка к большей части [1].

* Непрерывная математика в отличие от дискретной, получившей мощный стимул развития в связи с развитием ЭВМ, — это математика непрерывных величин — дифференциальное и интегральное исчисление, топология, функциональный анализ и др. (Прим. ред.)

С золотым сечением тесно связаны числа Фибоначчи [2], обнаруженные в XIII в. знаменитым итальянским математиком Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи) при решении задачи "о размножении кроликов". Числовой ряд Фибоначчи — это ряд чисел

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . ,

в котором каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Глубокая математическая связь между числами Фибоначчи и золотым сечением состоит в том, что отношение соседних чисел Фибоначчи

$1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, \dots$

в пределе стремится к золотой пропорции.

Впервые интерес к пропорции, возникающей при делении отрезка в крайнем и среднем отношении, возникает в античной науке (Пифагор, Платон, Евклид). Удивительные математические свойства этой пропорции уже тогда создают вокруг нее ореол таинственности и мистичного поклонения. Античные скульпторы и архитекторы широко используют число 1, 62 или близкие к нему числовые соотношения в своих художественных произведениях.

В эпоху итальянского Возрождения возникает новая волна увлечения золотым сечением. Золотая пропорция возводится в ранг главного эстетического принципа. Леонардо да Винчи именует ее "Sectio aurea", откуда и происходит сам термин "золотое сечение" или "золотое число". Лука Пачиоли в 1509 г. пишет первое сочинение о золотой пропорции, озаглавленное "De divina Proportione", что значит "О божественной пропорции". Иоганн Кеплер, первым упоминающий о значении этой пропорции в ботанике, говорит о ней, как о "бесценном сокровище, как об одном из двух сокровищ геометрии" и называет ее "Sectio divina" (божественное сечение). Нидерландский композитор Якоб Обрехт (1430—1505 гг.) широко использует золотое сечение в своих музыкальных композициях, которые уподобляют "кафедральному собору, созданному гениальным архитектором".

После эпохи Возрождения почти на два столетия золотое сечение было предано забвению. В середине XIX в. немецкий ученый Цейзинг делает попытку сформулировать всеобщий закон пропорциональности и при этом вновь открывает золотое сечение. В своих "Эстетических исследованиях" ("Aesthetische Forschungen") этот закон он формулирует следующим образом: "Для того чтобы целое, разделенное на две неравные части, казалось прекрасным с точки зрения формы, между меньшей и большей частями должно быть то же отношение, что и между большей частью и целым" [3, с. 19]. Он показывает, что этот закон проявляется в пропорциях человеческого тела и в теле тех животных, формы которых отличаются изяществом. В теле античных статуй (в частности, в статуе Аполлона Бельведерского) и хорошо сложенных

людей пуп является точкой деления высоты тела в золотом сечении. Пропорциональные отношения, близкие к золотому сечению, Цейзинг находит в некоторых эллинских храмах (в частности, в Парфеноне), в конфигурациях минералов, растений, в звуковых аккордах музыки.

В конце XIX в. немецкий психолог Фехнер проводит ряд психологических опытов для выяснения эстетического впечатления от прямоугольников, имеющих различные отношения сторон. Опыты оказались чрезвычайно благоприятными для золотого сечения [1].

В XX в. интерес к золотому сечению возрождается с новой силой. В первой половине века композитор Л. Сабанев формулирует общий закон ритмического равновесия и при этом обосновывает золотое сечение в качестве некоторой нормы творчества, нормы эстетической конструкции музыкального произведения [4]. О значении золотого сечения в природе и искусстве пишут Г. Е. Тимердинг [1], М. Гика [3]. Г. Д. Гримм, развивая идеи Цейзинга, формулирует закон золотого сечения как основу общего закона пропорциональности в архитектуре и показывает связь золотого сечения с числовыми пропорциями архитектурных памятников различных стилей [5].

Во второй половине XX века к числам Фибоначчи и золотому сечению обращаются представители практически всех наук и искусств (математики, физики, химии, ботаники, биологии, психологии, поэзии, архитектуры, музыки).

К "задаче о кроликах", с которой связано возникновение чисел Фибоначчи, в своих истоках восходит математическая теория биологических популяций. Закономерности, описываемые числами Фибоначчи и золотой пропорцией, обнаруживают во многих явлениях физического и биологического мира ("магические" ядра в физике, ритмы мозга и др.) [6, 7].

Советский математик Ю. В. Матиясевич с использованием чисел Фибоначчи решает 10-ю проблему Гильберта. Академик Г. В. Церетели обнаруживает золотое сечение в поэме Шота Руставели "Витязь в тигровой шкуре". Возникают изящные методы решения задач теории поиска и теории программирования, основанные на числах Фибоначчи и золотой пропорции [8, 9]. В США создается математическая Фибоначчи-ассоциация, которая с 1963 г. выпускает специальный математический журнал "The Fibonacci Quarterly". Композитор и теоретик музыки М. А. Марутаев, развивая идеи Цейзинга, Сабанева, Гримма и используя последние достижения физики, делает новый шаг в развитии понятия гармонии как закономерности и при этом связывает золотое сечение с двумя проблемами современной науки: нарушенной симметрией и "физическим" числом 137 [10, 11].

В последние десятилетия числа Фибоначчи и золотая пропорция неожиданно проявили себя в основании цифровой техники. Независимо друг от друга в различных областях цифровой техники возникает ряд нетрадиционных направлений в теории кодирования информации. К ним относятся:

1) избыточные самосинхронизирующиеся коды Фибоначчи, предложенные в 1965 г. американским специалистом в области теории кодирования Котсом [12];

2) система счисления с иррациональным основанием типа золотой пропорции, предложенная в 1957 г. Джорджем Бергманом [13];

3) алгоритмическая теория измерения и теория избыточных измерительных кодов [14–20];

4) "фибоначчиевы" системы счисления [21–23].

Общим для всех этих направлений явилась их тесная связь с числами Фибоначчи и золотой пропорцией, которые выступают в роли фундаментального начала указанных выше направлений в теории измерения и кодирования, затрагивающих основания цифровой техники.

Цель книги — в популярной форме изложить новый подход к построению информационных и арифметических основ цифровой техники, вытекающих из теории кодов Фибоначчи и золотой пропорции и построенных на их основе систем счисления.

В книге излагается теория обобщенных кодов Фибоначчи и золотой пропорции, называемых также p -кодами Фибоначчи и кодами золотой p -пропорции.

Коды золотой p -пропорции и p -коды Фибоначчи относятся к разряду двоичных позиционных систем нумерации действительных и натуральных чисел и являются естественным обобщением классической двоичной нумерации, которую они включают в качестве частного крайнего случая. При этом они сохраняют все положительные качества классической двоичной системы счисления, но за счет заложенной в них избыточности позволяют решить ряд задач, связанных с контролем измерительных и арифметических преобразований информации в цифровых системах.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой и ее приложениями в цифровой технике. Изложенная в книге теория послужила основой для создания большого количества изобретений в области цифровой техники, защищенных многочисленными авторскими свидетельствами и зарубежными патентами. Учитывая кибернетическую направленность монографии и ее ограниченный объем, основное внимание уделено теоретическим аспектам развиваемого научного направления.

Как и для любого нового научного направления, процесс внедрения кодов Фибоначчи и золотой пропорции в практику цифровой техники осуществляется с определенными трудностями. В процессе их преодоления большое значение имеет поддержка специалистов.

В этой связи хотелось бы выразить благодарность коллегам по кафедре вычислительной техники Винницкого политехнического института и ее ректору засл. деятелю науки УССР д-ру техн. наук проф. И. В. Кузьмину.

С интересом указанное научное направление было обсуждено на объединенном заседании компьютерного и кибернетического обществ Австрии (Вена, 1976 г.). Автор выражает благодарность зарубежным специалистам —

призиденту Австрийского кибернетического общества проф. Траппелю, директору математического института Грацкого университета проф. Айгнеру, директору института обработки информации Венского технического университета проф. Айеру, директору института статистики и информатики Линцского университета им. Иоганна Кеплера проф. Адаму, отзывы которых стимулировали работу автора над монографией.

Большую практическую поддержку развиваемому научному направлению оказывал академик Б. Н. Петров. Памяти этого выдающегося ученого и замечательного человека и посвящается настоящая книга.

Автор и издательство будут благодарны за отзывы и замечания по содержанию книги, которые следует направлять по адресу: 101000, Москва, Почтамт, а/я 693, издательство "Радио и связь".

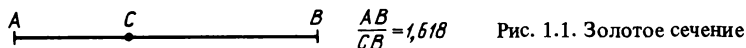
Глава 1

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

1.1. ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

1. Как упоминалось в предисловии, золотое сечение возникает как результат решения следующей геометрической задачи (рис. 1.1). На отрезке AB требуется найти такую точку C , чтобы

$$AB/CB = CB/AC. \quad (1.1)$$



Обозначим это отношение через x . Так как $AB = AC + CB$, то $(AC + CB)/CB = 1 + 1/x = x$, откуда вытекает следующее уравнение для нахождения искомого отношения:

$$x^2 = x + 1. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) имеет два корня: $(1 + \sqrt{5})/2$ и $(1 - \sqrt{5})/2$.

Положительный корень этого уравнения $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ и называется *золотой пропорцией*, а деление отрезка AB в отношении (1.1) — *золотым сечением*.

Золотая пропорция, будучи корнем уравнения (1.2), обладает следующим замечательным свойством:

$$\alpha^2 = \alpha + 1. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) можно переписать в следующем виде:

$$\alpha = 1 + 1/\alpha; \quad (1.4)$$

$$\alpha - 1 = 1/\alpha, \quad (1.5)$$

откуда вытекает, что при вычитании из числа α единицы оно переходит в обратное ему. Доказано, что золотая пропорция — единственное положительное число, обладающее этим свойством.

Подставив вместо α в правую часть равенства (1.4) выражение $\alpha = 1 + 1/\alpha$, получим

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} \quad (1.6)$$

Продолжая этот процесс, т. е. подставляя вместо α в правую часть (1.6) выражение (1.4), получаем представление золотой пропорции в виде бесконечной цепной дроби:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (1.7)$$

Предельная простота этого представления подчеркивает фундаментальный характер* золотой пропорции.

Из уравнения (1.3) вытекает следующее представление золотой пропорции:

$$\alpha = \sqrt{1 + \alpha}. \quad (1.8)$$

Подставив вместо α в правую часть (1.8) выражение

$$\alpha = \sqrt{1 + \alpha},$$

получим

$$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \alpha}}.$$

Продолжая этот процесс подстановки, получаем еще одно замечательное представление золотой пропорции:

$$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

2. Исследуем свойства степеней золотой пропорции. Умножив и разделив левую и правую части (1.3) на α , получим два новых равенства:

$$\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha; \quad (1.9)$$

$$\alpha = 1 + \alpha^{-1}. \quad (1.10)$$

Продолжая процесс многократного умножения или деления левой и правой части равенства (1.3) на α , можно установить следующее фундаментальное свойство, связывающее степени золотой пропорции:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}, \quad (1.11)$$

где n — целое число.

* Автор, по-видимому, имеет в виду, что "все великое — просто", однако такое утверждение далеко не всегда очевидно, хотя, может быть, и верно. (Прим. ред.)

Рассмотрим геометрическую прогрессию, образованную степенями золотой пропорции, т. е.

$$\alpha^n, \alpha^{n-1}, \dots, \alpha^2, \alpha^1, \alpha^0, \alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \alpha^{-3}, \dots \quad (1.12)$$

Из выражения (1.11) вытекает, что прогрессия (1.12) обладает тем свойством, что каждый ее член равен сумме двух предыдущих.

Подставив в правую часть уравнения (1.3) выражение для

$$\alpha = (1 + \sqrt{5})/2,$$

получим следующее аналитическое выражение для квадрата золотой пропорции:

$$\alpha^2 = (3 + \sqrt{5})/2. \quad (1.13)$$

С другой стороны,

$$\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = (3 + \sqrt{5})/2 + (1 + \sqrt{5})/2 = (4 + 2\sqrt{5})/2,$$

$$\alpha^4 = \alpha^3 + \alpha^2 = (4 + 2\sqrt{5})/2 + (3 + \sqrt{5})/2 = (7 + 3\sqrt{5})/2.$$

Воспользовавшись равенством

$$\alpha^{n-2} = \alpha^n - \alpha^{n-1},$$

можно получить аналитические выражения для отрицательных степеней золотой пропорции:

$$\alpha^{-1} = \alpha - 1 = (1 + \sqrt{5})/2 - 1 = (-1 + \sqrt{5})/2;$$

$$\alpha^{-2} = 1 - \alpha^{-1} = 1 - (-1 + \sqrt{5})/2 = (3 - \sqrt{5})/2;$$

$$\alpha^{-3} = \alpha^{-1} - \alpha^{-2} = (-1 + \sqrt{5})/2 - (3 - \sqrt{5})/2 = (-4 + 2\sqrt{5})/2$$

и т. д.

В табл. 1.1 приведены аналитические выражения для степеней золотой пропорции.

Т а б л и ц а 1.1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
α^n	$\frac{2+0\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{4+2\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$	$\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$	$\frac{18+8\sqrt{5}}{2}$	$\frac{29+13\sqrt{5}}{2}$	$\frac{47+21\sqrt{5}}{2}$
α^{-n}	$\frac{2+0\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-4+2\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}$	$\frac{18-8\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-29+13\sqrt{5}}{2}$	$\frac{47-21\sqrt{5}}{2}$

Анализ табл. 1.1 показывает, что в общем случае n -я степень золотой пропорции α^n может быть представлена в следующем виде:

$$\alpha^n = \frac{A(n) + B(n)\sqrt{5}}{2},$$

где $A(n)$ есть n -е число из числового ряда, задаваемого табл. 1.2, а $B(n)$ есть n -е число из числового ряда, задаваемого в табл. 1.3.

Таблица 1.2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$A(n)$		1	3	4	7	11	18	29	47
$A(-n)$	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47

Таблица 1.3

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$B(n)$		1	1	2	3	5	8	13	21
$B(-n)$	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21

Ряд чисел $B(n)$ для неотрицательных значений n совпадает с рядом Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., в котором каждое число равно сумме двух предыдущих, ряд чисел $B(-n)$, соответствующих отрицательным значениям n , представляет собой знакопеременный ряд Фибоначчи

1, -1, 2, -3, 5, -8, 13, -21, 34, -55, ...,

в котором каждое число $B(-n)$ равно сумме двух последующих, т. е.

$$B(-n) = B[-(n+1)] + B[-(n+2)].$$

Анализ табл. 1.2 показывает, что ряд чисел 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... соответствующих неотрицательным значениям n , совпадает с рядом чисел Люка [24], в котором каждое число также равно сумме двух предыдущих, однако начальные числа ряда есть 2 и 1; ряд чисел $A(-n)$, соответствующих отрицательным значениям n , является знакопеременным рядом Люка

-1, 3, -4, 7, -11, 18, -24, 47, ...

в котором каждое число $A(-n)$ равно сумме двух последующих, т. е.

$$A(-n) = A[-(n+1)] + A[-(n+2)].$$

Анализ табл. 1.1 позволяет вывести две замечательные формулы, устанавливающие связь степеней золотой пропорции с числами $A(n)$ и $B(n)$, соответствующими неотрицательным значениям n :

$$A(n) = \begin{cases} \alpha^n + \alpha^{-n} & \text{для четных } n; \\ \alpha^n - \alpha^{-n} & \text{для нечетных } n; \end{cases} \quad (1.14)$$

$$B(n) = \begin{cases} (\alpha^n + \alpha^{-n})/\sqrt{5} & \text{для четных } n; \\ (\alpha^n - \alpha^{-n})/\sqrt{5} & \text{для нечетных } n. \end{cases} \quad (1.15)$$

3. Золотое сечение широко встречается в геометрии. Геометрически деление отрезка золотым сечением осуществляют следующим образом (рис. 1.2).

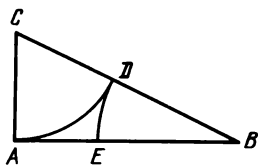


Рис. 1.2. Геометрическое построение золотого сечения

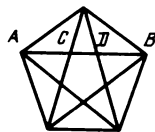


Рис. 1.3. Пентаграмма:
 $AB/CB = CB/DB = DB/CD = \alpha$

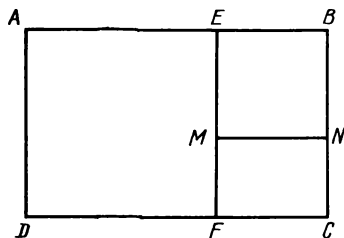


Рис. 1.4. Прямоугольник золотого сечения:
 $AD = 1, AB = \alpha, EB = \alpha^{-1}, BN = \alpha^{-1}, NC = \alpha^{-2}$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACB , в котором стороны AB и AC имеют следующие длины: $AB = 1, AC = 1/2$. Тогда длина стороны CB равна:

$$CB = \sqrt{1 + (1/2)^2} = \sqrt{5}/2.$$

Проведя из центра C дугу через A до пересечения с CB в точке D , получаем $BD = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Проведя теперь через D дугу с центром в B до пересечения с отрезком AB , находим искомую точку E , делящую отрезок AB в золотой пропорции.

Доказано [2], что

$$\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 2\cos 36^\circ$$

Используя это равенство, можно показать, что в звездчатом пятиугольнике (пентаграмме) точки пересечения диагоналей делят их в золотом сечении, т. е.

$$AB/CB = CB/DB = DB/CD = \alpha \text{ (рис. 1.3).}$$

Рассмотрим прямоугольник золотого сечения (рис. 1.4), в котором большая сторона $AB = \alpha$, меньшая $AD = 1$, а их отношение $AB/AD = \alpha$. Площадь прямоугольника равна α . Разделив отрезок AB точкой E в золотой пропорции ($\alpha = 1 + \alpha^{-1}$) и построив квадрат $ADEF$, получим новый прямоугольник золотого сечения $EBCF$, стороны которого равны $BC = 1, EB = \alpha^{-1}$. Разделив

теперь точкой N сторону BC в золотой пропорции ($1 = \alpha^{-1} + \alpha^{-2}$) и построив квадрат $EBNM$, получим еще один прямоугольник золотого сечения $MNCF$ со сторонами $MN = \alpha^{-1}$ и $NC = \alpha^{-2}$. Площадь прямоугольника $MNCF$ равна α^{-3}

Заметим, что отношение площадей прямоугольников $ABCD$ и $MNCF$ равно α^4 .

Давно замечено, что прямоугольники золотого сечения выглядят пропорционально, а вещами, имеющими такую форму, удобно пользоваться. Поэтому многим прямоугольным предметам домашнего обихода (книгам, чемоданам, спичечным коробкам, зажигалкам) часто придают именно такую форму.

1.2. ОБОБЩЕННАЯ ЗОЛОТАЯ ПРОПОРЦИЯ

1. Задача о золотом сечении отрезка допускает следующее обобщение. Зададимся целым неотрицательным числом p и разделим отрезок AB точкой C на две неравные части в такой пропорции, чтобы отношение большей части к меньшей CB/AC равнялось бы p -й степени отношения всего отрезка к большей части (рис. 1.5), т. е.

$$AB/CB = x; \quad CB/AC = x^p \quad (1.16)$$

Так как $AB = AC + CB$, то

$$(AC + CB)/CB = 1 + 1/x^p = x,$$

откуда вытекает следующее уравнение для нахождения искомого отношения:

$$x^{p+1} = x^p + 1. \quad (1.17)$$

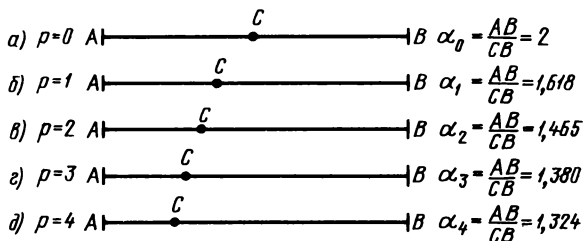


Рис. 1.5. Золотое p -сечение

Обозначим через α положительный корень уравнения (1.17).

Уравнение (1.17) ^{p} задает бесконечное число пропорциональных делений отрезка типа (1.16), так как каждому p соответствует свой вариант деления. Рассмотрим частные случаи деления отрезка в отношении (1.16), соответствующие различным значениям p .

При $p = 0$ (рис. 1.5, а) деление отрезка (1.16) задается с помощью следующих соотношений между отрезками:

$$AB/CB = x; CB/AC = 1,$$

что соответствует классической дихотомии, т. е. $\alpha_0 = 2$.

При $p = 1$ (рис. 1.5, б) деление отрезка (1.16) сводится к золотому сечению, так как

$$AB/CB = x \text{ и } CB/AC = x,$$

а положительный корень уравнения (1.17) совпадает с золотой пропорцией, т. е.

$$\alpha_1 = \alpha = (1 + \sqrt{5})/2.$$

С учетом этого обстоятельства положительный корень уравнения (1.17) был назван *обобщенной золотой пропорцией* или *золотой p -пропорцией*.

На рис. 1.5 приведены приближенные значения золотой p -пропорции, соответствующие начальным значениям p .

Из уравнения (1.17) вытекает следующее фундаментальное свойство золотой p -пропорции, справедливое для любого целого n :

$$\alpha_p^n = \alpha_p^{n-1} + \alpha_p^{n-p-1}. \quad (1.18)$$

В частности, при $n = 1$ равенство (1.18) принимает вид

$$\alpha_p = 1 + 1/\alpha_p^p. \quad (1.19)$$

Переписав (1.18) в виде

$$\alpha_p - 1 = 1/\alpha_p^p,$$

получим, что золотая p -пропорция при вычитании из нее единицы переходит в число, обратное его p -й степени.

При $p = 0$ равенство (1.18) принимает вид следующего тривиального тождества, задающего основное свойство двоичных чисел:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1},$$

а при $p = 1$ равенство (1.18) совпадает с равенством (1.11).

2. Рассмотрим геометрическую прогрессию, образованную степенями золотой p -пропорции, т. е.

$$\alpha_p^n, \dots, \alpha_p^4, \alpha_p^3, \alpha_p^2, \alpha_p, 1, \alpha_p^{-1}, \alpha_p^{-2}, \alpha_p^{-3}, \dots \quad (1.20)$$

Из равенства (1.18) вытекает основное свойство геометрической прогрессии (1.20), состоящее в том, что каждый ее член, например n -й, равен сумме $(n - 1)$ -го и $(n - p - 1)$ -го членов. При $p = 0$ это означает, что n -й член равен удвоенному предыдущему, а при $p = 1$ — сумме двух предыдущих.

Раскладывая число α_p^n и все возникающие при этом члены

$$\alpha_p^{n-1}, \alpha_p^{n-2}, \dots, \alpha_p^{n-k+1}$$

по рекуррентной формуле (1.18), получаем систему равенств:

$$\begin{aligned}\alpha_p^n &= \alpha_p^{n-p-1} + \alpha_p^{n-1} \\ \alpha_p^n &= \alpha_p^{n-p-1} + \alpha_p^{n-p-2} + \alpha_p^{n-2}; \\ \alpha_p^n &= \alpha_p^{n-p-1} + \alpha_p^{n-p-2} + \alpha_p^{n-p-3} + \alpha_p^{n-3}; \\ \alpha_p^n &= \sum_{j=1}^k \alpha_p^{n-p-j} + \alpha_p^{n-k}.\end{aligned}\quad (1.21)$$

В частности, при $k = p$ равенство (1.21) принимает вид

$$\alpha_p^n = \sum_{j=1}^p \alpha_p^{n-p-j} + \alpha_p^{n-p} = \sum_{j=0}^p \alpha_p^{n-p-j} \quad (1.22)$$

Раскладывая α_p^n и все возникающие при этом члены

$$\alpha_p^{n-(p+1)}, \alpha_p^{n-2(p+1)}, \dots, \alpha_p^{n-(k-1)(p+1)}$$

по рекуррентной формуле (1.18), получаем следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}\alpha_p^n &= \alpha_p^{n-1} + \alpha_p^{n-(p+1)}; \\ \alpha_p^n &= \alpha_p^{n-1} + \alpha_p^{n-(p+1)-1} + \alpha_p^{n-2(p+1)}; \\ \alpha_p^n &= \alpha_p^{n-1} + \alpha_p^{n-(p+1)-1} + \alpha_p^{n-2(p+1)-1} + \alpha_p^{n-3(p+1)};\end{aligned}$$

$$\alpha_p^n = \sum_{j=1}^k \alpha_p^{n-(j-1)(p+1)-1} + \alpha_p^{n-k(p+1)} \quad (1.23)$$

В частности, при $p = 0$ равенства (1.21) и (1.23) совпадают и вырождаются в следующее известное свойство двоичных чисел:

$$2^n = \sum_{j=1}^k 2^{n-j} + 2^{n-k} \quad (1.24)$$

При $p = 1$ $\alpha_1 = \alpha$ и равенства (1.21) и (1.23) принимают соответственно следующий вид:

$$\alpha^n = \sum_{j=1}^k \alpha^{n-j-1} + \alpha^{n-k}; \quad (1.25)$$

$$\alpha^n = \sum_{j=1}^k \alpha^{n-2j-1} + \alpha^{n-2k}. \quad (1.26)$$

3. Золотая p -пропорция, являясь обобщением классической золотой пропорции, выражает более общий закон пропорционального отношения между целым и его частями. Для пояснения этого положения рассмотрим прямоугольник золотого p -сечения (рис. 1.6), в котором большая сторона $AB = \alpha_p$, а меньшая $AD = 1$; отношение сторон $AB/AD = \alpha_p$. Площадь прямоугольника также равна α_p . Разделив отрезок AB в точке E золотым p -сечением ($\alpha_p = 1 + \alpha_p^{-p}$) и вычленив квадрат $AEFD$, получим новый прямоугольник золотого p -сечения $EBCF$, стороны которого равны $EF = 1$, $FC = \alpha_p^{-p}$, а их отношение $EF/FC = \alpha_p^p$. Сторону BC разделим точкой N золотым p -сечением

($1 = \alpha_p^{-1} + \alpha_p^{-p-1}$) и образуем два новых прямоугольника золотого p -сечения $EBNM$ и $MNCF$, в первом из которых отношение сторон равно $BN/EB = \alpha_p^{p-1}$, а во втором $FC/CN = \alpha_p$.

Прямоугольник $MNCF$ подобен исходному прямоугольнику $ABCD$ и снова может быть разделен на три части подобно делению исходного прямоугольника $ABCD$.

Площадь прямоугольника $MNCF$ равна α_p^{-2p-1} ; при этом отношение между площадями прямоугольников $ABCD$ и $MNCF$ равно α_p^{2p+2}

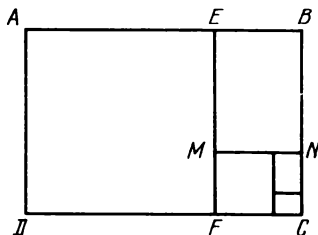


Рис. 1.6. Прямоугольник золотого p -сечения:

$$AD = 1, AB = \alpha_p, EB = \alpha_p^{-p}, BN = \alpha_p^{-1}, NC = \alpha_p^{-p-1}$$

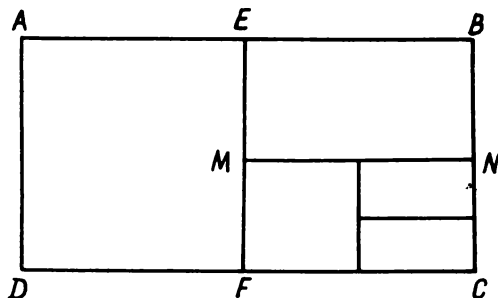


Рис. 1.7. Прямоугольник золотого p -сечения при $p = 0$

Заметим, что при $p = 0$ прямоугольник золотого p -сечения на рис. 1.6 сводится к прямоугольнику с отношением сторон 2:1 (рис. 1.7), а при $p = 1$ — к классическому золотому прямоугольнику (см. рис. 1.4).

1.3. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

1. Одним из крупнейших математиков эпохи средневековья по праву считается итальянский математик Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи). Сын пизанского купца, торговавшего в Алжире, Леонардо получил образование в арабских учебных заведениях, где он познакомился с достижениями арабской и индийской научной мысли — алгеброй и десятичной системой счисления. В 1202 г. Леонардо написал книгу "Liber Abaci", которая сыграла заметную роль в развитии математики в Западной Европе. В этой книге Леонардо одним из первых ввел в европейскую математику арабо-индийскую десятичную позиционную систему счисления, предложил и решил ряд новых комбинаторных задач, в частности задачу о наилучшей системе гирь, при решении которой он изобрел двоичную систему счисления.

Как подчеркивает Н. Я. Виленкин, "главной заслугой Леонардо перед комбинаторикой было то, что он сформулировал и решил задачу о кроликах. Со времен греческих математиков было известно две последовательности, каждый член которых получался по определенным правилам из предыдущих — арифметическая и геометрическая прогрессии. В задаче Леонардо появилась новая последовательность, члены которой были связаны друг с другом соотношением $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Это была первая в истории науки формула, в которой следующий член выражался через два предыдущих. Подобные формулы получили название *рекуррентных* (от латинского слова *recurrere* — возвращаться). Метод рекуррентных формул оказался впоследствии одним из самых мощных для решения комбинаторных задач" [25, с. 15].

Изложим упомянутую выше задачу о кроликах, впервые описанную в книге "Liber Abaci", в современной интерпретации: "Пара зрелых кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата в течение месяца "созревают", а еще через месяц уже приносят приплод.

Сколько пар кроликов появится через n месяцев, если:

- а) размножение началось с пары зрелых кроликов;
- б) размножение началось с пары новорожденных кроликов?"

Обозначим через $\varphi(n)$ число пар кроликов по истечении n месяцев с начала размножения ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Тогда при $n \geq 2$ количество пар кроликов можно определить по рекуррентной формуле:

$$\varphi(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-2). \quad (1.27)$$

Начальные условия ($n = 0, 1$) зависят от "зрелости" кроликов, с которых начинается размножение, и для случаев а) и б) соответственно имеют вид:

$$\text{а) } \varphi(0) = 1; \varphi(1) = 2; \quad (1.28)$$

$$\text{б) } \varphi(0) = \varphi(1) = 1. \quad (1.29)$$

При начальных условиях (1.28), (1.29) рекуррентная формула (1.27) производит две последовательности чисел:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots \quad (1.30)$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \quad (1.31)$$

В математике [2] под числами Фибоначчи обычно понимают ряд чисел (1.31).

Более компактная запись для рекуррентной формулы (1.27) при начальном условии (1.29) имеет вид

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0; \\ 1 & \text{при } n = 0; \\ \varphi(n-1) + \varphi(n-2) & \text{при } n > 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

2. Установим некоторые свойства чисел Фибоначчи (1.31). Вначале попытаемся продолжить последовательность (1.31) в левую сторону, сохранив при этом основное правило: каждый член равен сумме двух предыдущих. Полученная таким способом последовательность представлена ниже

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\varphi(n)$	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13

Сравнивая эти данные с данными, приведенными в табл. 1.3, нетрудно установить, что числа $B(n)$ совпадают с числами $\varphi(n-1)$, т. е.

$$\varphi(n-1) = B(n). \quad (1.33)$$

С учетом выражения (1.33) формула (1.15) может быть записана в виде

$$\varphi(n-1) = \begin{cases} (\alpha^n + \alpha^{-n}) / \sqrt{5} & \text{для четных } n; \\ (\alpha^n - \alpha^{-n}) / \sqrt{5} & \text{для нечетных } n. \end{cases} \quad (1.34)$$

Формула (1.34) известна в математике под названием формулы Бинэ [2].

С увеличением n член α^{-n} в формуле Бинэ неограниченно уменьшается и в пределе стремится к нулю, откуда вытекает, что при достаточно больших n число Фибоначчи $\varphi(n-1)$ приближенно можно представить в виде

$$\varphi(n-1) \approx \alpha^n / \sqrt{5}. \quad (1.35)$$

Анализируя последовательность чисел Фибоначчи (1.31), нетрудно установить, что в ряду Фибоначчи после двух нечетных чисел следует одно четное число, т. е. остатки от деления чисел Фибоначчи на 2 представляют собой периодическую последовательность:

$$1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots$$

Доказано [26], что остатки от деления чисел Фибоначчи на любое целое число N всегда образуют периодическую последовательность.

В предисловии упоминалось, что в пределе отношение соседних чисел Фибоначчи

$$1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, \dots$$

стремится к золотой пропорции. Докажем это свойство. Для этого обозначим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} = x. \quad (1.36)$$

Подставим в выражение (1.36) вместо $\varphi(n)$ его значение, задаваемое рекуррентной формулой (1.27):

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n-1) + \varphi(n-2)}{\varphi(n-1)} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 / \frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n-2)} \right] = 1 + \frac{1}{x},$$

откуда вытекает следующее уравнение для нахождения x :

$$x^2 = x + 1.$$

Положительный корень этого уравнения является золотой пропорцией и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (1.37)$$

Вычислим сумму первых n членов в ряде Фибоначчи (1.31). Для этого представим рекуррентную формулу (1.27) в виде

$$\varphi(n) = \varphi(n+2) - \varphi(n+1). \quad (1.38)$$

Используя (1.38), запишем следующие равенства:

$$\varphi(0) = \varphi(2) - \varphi(1),$$

$$\varphi(1) = \varphi(3) - \varphi(2),$$

$$\varphi(2) = \varphi(4) - \varphi(3),$$

$$\varphi(n-2) = \varphi(n) - \varphi(n-1),$$

$$\varphi(n-1) = \varphi(n+1) - \varphi(n).$$

Суммируя все эти равенства почленно и учитывая, что $\varphi(1) = 1$, получаем:

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(n-1) = \varphi(n+1) - 1. \quad (1.39)$$

1.4. ОБОБЩЕННЫЕ ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

1. Задача о кроликах, называемая также задачей Ф и б о н а ч ч и, допускает следующее обобщение. Зададимся целым неотрицательным числом p и будем считать, что "созревание кроликов" происходит в течение p месяцев после рождения. Ясно, что при $p = 1$ обобщенный вариант задачи о кроликах совпадает с классической задачей Фибоначчи.

Обозначим через $\varphi_p(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала размножения ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Тогда при $0 \leq n \leq p$ закон размножения кроликов зависит от "зрелости" кроликов, с которых началось размножение. Действительно, если начать с одной пары новорожденных кроликов, то первые p месяцев будет происходить их "созревание" и поэтому никакого прироста кроличьих пар не получим, т. е.

$$\varphi_p(0) = \varphi_p(1) = \dots = \varphi_p(p) = 1. \quad (1.40)$$

Если же размножение началось с пары зрелых кроликов, то в течение первых p месяцев ежемесячный приплод в одну пару будет давать только начальная пара зрелых кроликов, т. е.

$$\varphi_p(0) = 1; \varphi_p(1) = 2; \quad ; \varphi_p(p) = p + 1. \quad (1.41)$$

Пусть $n > p$. Тогда в n -м месяце к уже имеющимся в $(n - 1)$ -м месяце $\varphi_p(n - 1)$ парам кроликов прибавляется $\varphi_p(n - p - 1)$ пар крольчат, родившихся у всех кроличьих пар, существовавших $(p + 1)$ месяцев назад. Из этих рассуждений вытекает следующее рекуррентное соотношение для вычисления $\varphi_p(n)$ при $n > p$:

$$\varphi_p(n) = \varphi_p(n - 1) + \varphi_p(n - p - 1). \quad (1.42)$$

Рассмотрим частные случаи сформулированного выше обобщенного варианта задачи о кроликах. Пусть $p = 0$. Смысл этого условия в задаче о кроликах состоит в том, что "созревание" кроликов происходит "мгновенно", т. е. новорожденные крольчата становятся зрелыми сразу же после рождения. При этом условии рекуррентное соотношение (1.42) принимает вид

$$\varphi_0(n) = 2 \varphi_0(n - 1)$$

и при начальном условии $\varphi_0(0) = 1$ порождает двоичный ряд чисел

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots,$$

т. е. при $p = 0$ кролики размножаются по двоичному закону.

При $p = 1$ рекуррентное соотношение (1.42) совпадает с рекуррентной формулой Фибоначчи (1.27) и порождает числовой ряд Фибоначчи. На этом основании числа $\varphi_p(n)$, порождаемые рекуррентным соотношением (1.42), обобщающим формулу Фибоначчи (1.27), были названы *обобщенными числами Фибоначчи*, или *p-числами Фибоначчи* [15].

Пусть $p = \infty$. Смысл этого условия состоит в том, что процесс "созревания" кроликов длится бесконечно долго. Ясно, что если размножение началось с пары новорожденных кроликов, то никакого прироста кроликов при $p = \infty$ не наблюдается, т. е. для любого $n \geq 0$ имеет место тождество:

$$\varphi_p(n) = 1.$$

Если же размножение начинается с пары зрелых кроликов, то при $p = \infty$ закон их размножения задается уравнением

$$\varphi_p(n) = n + 1,$$

которое порождает натуральный ряд чисел.

В дальнейшем под p -числами Фибоначчи будем понимать числа $\varphi_p(n)$, порождаемые рекуррентной формулой (1.42) при начальных условиях (1.40).

Более компактная запись для рекуррентной формулы (1.42) при начальных условиях (1.40) имеет вид:

$$\varphi_p(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0; \\ 1 & \text{при } n = 0; \\ \varphi_p(n+1) + \varphi_p(n-p-1) & \text{при } n > 0. \end{cases} \quad (1.43)$$

В табл. 1.4 приведены ряды p -чисел Фибоначчи $\varphi_p(n)$, соответствующие различным значениям p .

Т а б л и ц а 1.4

$p \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
2	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88
3	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36
∞	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

2. Двоичные числа $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$, будучи крайним частным случаем p -чисел Фибоначчи ($p = 0$), обладают следующим замечательным свойством:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1. \quad (1.44)$$

Обобщением указанного свойства является следующее выражение для суммы первых n членов ряда p -чисел Фибоначчи:

$$\varphi_p(0) + \varphi_p(1) + \varphi_p(2) + \dots + \varphi_p(n-1) = \varphi_p(n+p) - 1. \quad (1.45)$$

Для доказательства тождества (1.45) представим рекуррентное соотношение для p -чисел Фибоначчи в следующем виде:

$$\varphi_p(n) = \varphi_p(n+p+1) - \varphi_p(n+p). \quad (1.46)$$

Используя (1.46), запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \varphi_p(0) &= \varphi_p(1+p) - \varphi_p(p); \\ \varphi_p(1) &= \varphi_p(2+p) - \varphi_p(1+p); \\ \varphi_p(2) &= \varphi_p(3+p) - \varphi_p(2+p); \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_p(n-2) &= \varphi_p(n+p-1) - \varphi_p(n+p-2); \\ \varphi_p(n-1) &= \varphi_p(n+p) - \varphi_p(n+p-1). \end{aligned}$$

Известно, что сумма биномиальных коэффициентов, составляющих n -й столбец 0-треугольника Паскаля, равна 2^n . С другой стороны, $2^n = \varphi_0(n)$, где $\varphi_0(n)$ — n -е число ряда 0-чисел Фибоначчи, т. е.

$$\varphi_0(n) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n.$$

Сдвинем каждую строку 0-треугольника Паскаля на один столбец вправо относительно предыдущей строки. В результате таких действий получим следующую таблицу биномиальных коэффициентов, которую назовем 1-треугольником Паскаля:

	C_0^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	C_4^0	C_5^0		C_{2m}^0	C_{2m+1}^0				
		C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1			C_{2m-1}^1	C_{2m}^1				
			C_2^2	C_3^2				C_{2m-2}^2	C_{2m-1}^2				
				C_m^m			C_{m+1}^m						
т. е.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
				1	3	6	10	15	21	28	36		
					1	4	10	20	35	56			
							1	5	15	35			
									1	6			
<hr/>													
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	

Нетрудно установить, что сумма биномиальных коэффициентов, составляющих n -й столбец 1-треугольника Паскаля, равна n -му p -числу Фибоначчи при $p = 1$. Пусть $n = 2m + r$, где m — частное, а r — остаток от деления n на 2. Тогда

$$\varphi_1(n) = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{m+r}^m. \quad (1.49)$$

Теперь ясен ход дальнейших рассуждений. Сдвигая каждую строку 0-треугольника Паскаля на p столбцов вправо относительно предыдущей строки, в результате таких действий получаем p -треугольник Паскаля, для которого справедливо следующее общее утверждение: сумма биномиальных коэффициентов, составляющих n -й столбец p -треугольника Паскаля, равна n -му p -числу Фибоначчи.

Ниже приведены 2- и 3-треугольники Паскаля, подтверждающие это общее положение:

2-треугольник Паскаля													
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
						1	3	6	10	15	21	28	
									1	4	10	20	
												1	
<hr/>													
1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	

3-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
								1	3	6	10	15	21	
												1	4	

1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	--

4. Установим, к чему в пределе стремится отношение соседних p -чисел Фибоначчи. Для этого введем следующее обозначение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_p(n)}{\varphi_p(n-1)} = x. \quad (1.50)$$

Подставим в выражение (1.50) вместо $\varphi_p(n)$ его значение, задаваемое рекуррентной формулой (1.42):

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_p(n-1) + \varphi_p(n-p-1)}{\varphi_p(n-1)} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_p(n-p-1)}{\varphi_p(n-1)}. \quad (1.51)$$

Представим отношение $\varphi_p(n-p-1)/\varphi_p(n-1)$ в формуле (1.51) в следующем виде:

$$\frac{\varphi_p(n-p-1)}{\varphi_p(n-1)} = \frac{1}{\frac{\varphi_p(n-1)}{\varphi_p(n-2)} \cdot \frac{\varphi_p(n-2)}{\varphi_p(n-3)} \cdot \frac{\varphi_p(n-3)}{\varphi_p(n-4)} \cdots \frac{\varphi_p(n-p)}{\varphi_p(n-p-1)}}. \quad (1.52)$$

При $n \rightarrow \infty$ каждое из отношений

$$\varphi_p(n-1)/\varphi_p(n-2), \varphi_p(n-2)/\varphi_p(n-3), \dots, \varphi_p(n-p)/\varphi_p(n-p-1)$$

в соответствии с (1.50) стремится к x и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_p(n-p-1)}{\varphi_p(n-1)} = \frac{1}{x^p}.$$

Подставляя значение полученного предела в выражение (1.51), получаем следующее уравнение для нахождения предела (1.50):

$$x^{p+1} = x^p + 1. \quad (1.53)$$

Как установлено в п. 1.2, положительный корень уравнения (1.53) совпадает с золотой p -пропорцией и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_p(n)}{\varphi_p(n-1)} = \alpha_p, \quad (1.54)$$

т. е. при достаточно больших n отношения соседних p -чисел Фибоначчи равно золотой p -пропорции:

$$\varphi_p(n)/\varphi_p(n-1) \approx \alpha_p.$$

В п. 1.3 было установлено, что при достаточно больших n число Фибоначчи $\varphi_1(n)$ может быть приближенно представлено в виде

$$\varphi_1(n) \approx \alpha_1^{n+1}/k_1. \quad (1.55)$$

где $k_1 = \sqrt{5} \approx 2,2351$.

Учитывая (1.54), любое p -число Фибоначчи $\varphi_p(n)$ при достаточно больших n приближенно можно представить в виде

$$\varphi_p(n) \approx \alpha_p^{n+1}/k_p, \quad (1.56)$$

где k_p — некоторый постоянный коэффициент. Значения k_p для начальных значений p приведены ниже

p	0	1	2	3	4	5	6
k_p	2	2,2351	2,3979	2,5219	2,6362	2,6963	2,7972

Г л а в а 2

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ

2.1. КОНСТРУКТИВНЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ

Фундаментальным фактом истории математики нашего времени является смещение центра тяжести математических исследований в сторону экстремальных, оптимальных задач и значительное повышение роли конструктивного подхода.

Естественно, что эти процессы не могли не отразиться на развитии математической теории измерения. Как известно, с созданием математической теории измерения, лежащей в основе математической теории континуума и понятия действительного числа, связано ряд драматических событий в истории математики. Серьезный логический анализ проблем, связанных с измерением величин, начинается с открытия пифагорейцами несоизмеримых отрезков. Это открытие явилось причиной глубокого кризиса в основаниях античной математики, так как оно ниспровергало главный принцип математической системы пифагорейцев — принцип соизмеримости величин. Потрясение умов, связанное с этим открытием, было настолько большим, что Пифагор, как гласит легенда, принес в жертву богам 100 быков. Это открытие, безусловно,

стоило таких расходов, поскольку оно "явилось поворотным пунктом в развитии математики. Оно разрушило раннюю систему пифагорейцев и привело к созданию новых, очень тонких и глубоких теорий. Значение этого открытия можно, пожалуй, сравнить только с открытием неевклидовой геометрии в XIX в. или теории относительности в начале XX в. Так же, как и эти теории, проблема несоизмеримости получила громкую известность среди широких кругов образованных людей. Платон и Аристотель неоднократно обсуждали вопросы, связанные с несоизмеримостью" [27, с. 72–73].

Для преодоления кризиса в основаниях античной математики выдающийся геометр Евдокс предложил метод исчерпывания, с помощью которого он построил остроумную теорию отношений, лежащую в основе античной теории континуума. В современной математике метод исчерпывания находит свое отражение в аксиоме Евдокса — Архимеда, называемой также *аксиомой измерения*. Эта аксиома гласит, что каковы бы ни были отрезки A и B , всегда найдется такое натуральное число n , чтобы было: $nB > A$.

В 1872 г. Кантор для строгого обоснования понятия действительного числа на основе абстракции актуальной бесконечности в рамках созданной им теории бесконечных множеств ввел аксиому о "стягивающихся" отрезках, которая гласит, что если построить бесконечную совокупность "вложенных друг в друга отрезков", каждый из которых меньше предыдущего, то существует по крайней мере одна точка, общая всем "стягивающимся" отрезкам.

Аксиомы Евдокса—Архимеда и Кантора, называемые также *аксиомами непрерывности*, относятся к разряду важнейших геометрических аксиом и составляют методологический базис теоретико-множественной теории измерения. Основной абстракцией этой теории является представление об измерении как о процессе, завершающемся за бесконечное время. Именно эта абстракция — абстракция *актуально бесконечного* измерения — позволяет доказать теорему о взаимно-однозначном отображении множества отрезков на множество действительных чисел.

Как известно, абстракция актуальной (т. е. "статической", "завершенной") бесконечности была подвергнута резкой критике в конструктивной математике, которая усматривает в ней внутреннее противоречивое понятие ("завершенная" бесконечность), являющееся основной причиной противоречий, парадоксов в канторовской теории бесконечных множеств. По мнению одного из создателей конструктивной математики А. А. Маркова "мыслить себе бесконечный, т. е. никогда не завершаемый, процесс как завершенный не удается без грубого насилия над разумом, отвергающим такие противоречивые фантазии" [28, с. 41].

Конструктивный подход к измерению заключается в его рассмотрении как процесса *конечного, но потенциально неограниченного*, т. е. число шагов,

отводимых на измерение, конечно, но потенциально оно может быть установлено как угодно большим и всегда существует возможность для совершения следующего шага измерения.

Такое, на первый взгляд, незначительное, изменение в подходе приводит к переосмысливанию самих задач математической теории измерения. При теоретико-множественном подходе измерение ведется "до точки", т. е. до абсолютно точного совпадения измеряемого и измеряющего отрезков (возможность такого абсолютно точного измерения вытекает из аксиомы Кантора). При конструктивном подходе измерение никогда не доходит "до точки", а результатом измерения является некоторый отрезок, некоторый интервал неопределенности относительно истинного значения измеряемой величины. С увеличением времени измерения этот интервал сужается и может быть сделан как угодно малым, но *никогда этот интервал не превращается в точку*. В своей известной работе "О философии математики" Герман Вейль следующим образом выражает различие между классическим и конструктивным представлением о континууме: "Современному анализу континуум представляется в виде множества его точек, в континууме он видит лишь частный случай основного логического отношения элемента и множества. Но поразительно, что столь же фундаментальное отношение целого и части до сих пор не находило себе места в математике! Между тем обладание частями есть основное свойство континуума и брауэровская теория (в полном согласии с интуицией, против которой столь сильно грешит нынешний "атомизм") кладет это отношение в основание математического изучения континуума. В этом заключается собственно основание сделанной выше . . . попытки исходить не из точки, а из интервалов, как из первичных элементов построения" [26, с. 126].

Одним из моментов в теоретико-множественной теории измерения является выбор способа или алгоритма измерения, задающего систему счисления, в которой нумеруется число (результат измерения). При бесконечном времени измерения, т. е. при измерении "до точки", алгоритм не влияет на конечный результат измерения и поэтому проблема способов, алгоритмов измерения как серьезная математическая проблема здесь не возникает. Выбор алгоритма измерения в значительной степени носит произвольный характер и, как правило, сводится к десятичному или двоичному алгоритму.

При конечном времени измерения, т. е. при измерении "до интервала", между алгоритмами измерения появляется *различие* в достигаемой с их помощью "точности" измерения, под которой в данном случае понимается отношение исходного интервала неопределенности к интервалу неопределенности на последнем, завершающем шаге измерения (отношение целого и его части по Вейлю). В этих условиях вступает в действие вторая конструктивная идея об "эффективности" алгоритмов измерения (называемых

”эффективными” или ”оптимальными” в случае, когда они обеспечивают наибольшую ”точность” измерения), а задача синтеза *оптимальных алгоритмов* измерения и выдвигается в качестве центральной задачи конструктивной (алгоритмической) теории измерения.

Такая постановка задачи, вытекающая из конструктивного подхода, стимулировалась практикой современных измерений.

В начале 60-х годов на стыке между измерительной и цифровой вычислительной техникой возникла техника аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования информации. Основная задача этой области техники состояла в создании устройств, обеспечивающих автоматическое преобразование информации из аналоговой, непрерывной формы представления в дискретную, цифровую форму. Такие устройства получили название непрерывно-дискретных или аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Устройства, решающие обратную задачу, получили название дискретно-непрерывных или цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП). Таким образом, основное назначение АЦП и ЦАП состоит в обеспечении связи цифровых вычислительных машин (ЦВМ) с реальными объектами, в которых информация представлена в непрерывной, аналоговой форме.

С методологической точки зрения важное значение имело то обстоятельство, что в аналого-цифровом преобразователе практически осуществлялось превращение непрерывного в дискретное, величины в отображающее ее число, т. е. эта область техники неожиданно оказалась тесно связанной с рядом фундаментальных проблем философского и математического характера, поставленных еще в античной науке.

Расширение области применения ЦВМ и их использование для управления процессами, протекающими в ”реальном масштабе времени”, выдвинуло ряд специфических требований к АЦП и ЦАП. Наряду с традиционным требованием к повышению их точности весьма высокие требования при создании АЦП и ЦАП были предъявлены к их *быстродействию*. Достигнутое в настоящее время быстродействие АЦП и ЦАП составляет миллионы и десятки миллионов преобразований в секунду. На повестке дня стоит вопрос о создании АЦП и ЦАП с быстродействием в 1 млрд. преобразований/с и выше.

Использование АЦП и ЦАП в системах обработки данных в реальном масштабе времени (системы научного эксперимента, бортовые измерительно-вычислительные комплексы и др.) с особой остротой выдвинуло требование повышения достоверности, помехоустойчивости и метрологической надежности АЦП и ЦАП.

Так как структура и все основные характеристики АЦП и ЦАП в значительной степени определяются положенным в его основу алгоритмом измерения, то, начиная с 60-х годов, предметом многочисленных исследований в области аналого-цифрового преобразования становится анализ и синтез бо-

лее совершенных (оптимальных) алгоритмов и способов измерения, В настоящее время алгоритмический подход в теории аналого-цифрового преобразования является общепризнанным [15, 30, 31].

2.2. АСИММЕТРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Задача о наилучшей системе гирь. Одной из первых математических задач в теории измерения, имеющей четко выраженный конструктивный характер, является задача о выборе наилучшей системы гирь. Эту задачу впервые описал в книге "Liber Abaci" все тот же неутомимый Леонардо Пизанский (Фибоначчи).

В отечественной историко-математической литературе [32] задача о гирях известна также под названием задачи Баше–Менделеева, которое дано ей в честь французского математика XVII в. Баше де Мезириака и нашего выдающегося соотечественника Дмитрия Ивановича Менделеева, интересовавшегося этой задачей в бытность свою директором палаты мер и весов России.

Задача Баше–Менделеева состоит в выборе наилучшей, в смысле взвешивания, системы весовых гирь для взвешивания на рычажных весах. Известны два варианта этой задачи. В первом варианте взвешиваемый груз находится на левой чаше весов, а гири разрешается класть только на правую, т. е. свободную чашу весов; во втором варианте гири разрешается класть на обе чаши весов.

Рассмотрим первый вариант задачи, приводящий к доказательству оптимальности двоичной системы гирь. Он формулируется следующим образом: при какой системе гирь $\{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$, имея по одной, можно взвесить всевозможные грузы Q от 0 до наибольшего груза Q_{\max} , если гири разрешается класть только на свободную чашу весов.

Очевидно, что вес наибольшего груза, который может быть взвешен с помощью некоторой системы гирь, равен сумме всех имеющихся гирь. При этом гири необходимо подобрать так, чтобы из них можно было составить любой кратный $q_0 = 1$ вес от нуля до наибольшего груза. Если массам гирь $\{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$ поставить в соответствие некоторые натуральные числа $\{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\}$, которые будем называть *образующими числами*, причем $C_0 = 1$, то на математическом языке решение задачи о гирях сводится к нахождению таких образующих чисел $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$, с помощью которых путем сложения можно было бы образовать все натуральные числа от 0 до N , где $N = \sum_{i=0}^{n-1} C_i$. При этом оптимальным является такой набор образующих чисел, который при заданном n обеспечивает наибольшее значение N_{\max} для всех допустимых вариантов.

Решение задачи о гирях впервые было получено Леонардо Пизанским и состоит в выборе двоичной системы гирь $\{2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}\}$, с которыми

последовательно (начиная со старшей гири) происходит сравнение груза Q ; при этом наибольший вес взвешиваемого груза $Q_{\max} = 2^n - 1$.

Указанный способ измерения получил широкое распространение в современной технике аналого-цифрового преобразования [30] под названием *алгоритма поразрядного кодирования* или *поразрядного уравнивания*.

Алгоритм поразрядного кодирования интересен тем, что он порождает двоичный способ нумерации натуральных чисел:

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} a_l 2^l,$$

где $a_l \in \{0, 1\}$ — двоичная цифра в l -разряде двоичного кода, которая в задаче о гирях имеет следующую физическую интерпретацию: $a_l = 1$, если в результате сравнения груза Q с гирей 2^l чаши весов остались в исходном положении "больше"; $a_l = 0$, если чаши весов перешли в противоположное состояние "меньше".

При этом предполагается, что взвешивание ведется на идеальных весах, которые могут находиться только в двух крайних положениях — "больше" (если $Q_{\text{л}} \geq Q_{\text{пр}}$) и "меньше" (если $Q_{\text{л}} < Q_{\text{пр}}$), где $Q_{\text{л}}$, $Q_{\text{пр}}$ — вес грузов соответственно на левой и правой чашах весов.

2. Принцип асимметрии логики измерения. При внимательном анализе рассмотренного выше двоичного алгоритма измерения обнаруживается одна особенность, которая имеет принципиальный характер для теории измерения и наглядно может быть продемонстрирована на модели взвешивания на рычажных весах некоторого груза $Q < 2^n$ с помощью системы двоичных гирь $\{2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}\}$ (рис. 2.1). На первом шаге взвешивания на правую чашу весов кладется старшая гиря 2^{n-1} (рис. 2.1, а). При этом могут возникнуть две ситуации: если $Q \geq 2^{n-1}$ (рис. 2.1, б), то весы остаются в исходном положении "больше", результат сравнения на первом шаге считается единичным ($a_{n-1} = 1$), гиря оставляется на правой чаше весов, а на следующем шаге туда добавляется следующая по старшинству гиря 2^{n-2} . Если же $Q < 2^{n-1}$ (рис. 2.1, в), то весы переходят в положение "меньше", результат сравнения считается нулевым ($a_{n-1} = 0$), гиря 2^{n-1} снимается с правой чаши весов и после их возвращения в положение "больше" на правую чашу кладется гиря весом 2^{n-2} (рис. 2.1, г).

Таким образом, после первого (как и после любого) шага взвешивания действия "весовщика" радикальным образом зависят от положения, в котором оказываются рычажные весы (устройство сравнения в аналого-цифровом преобразователе) после добавления очередной гири. При этом если после сравнения весы остались в положении "больше", то на следующем шаге "весовщик" должен выполнить одну операцию — положить на правую чашу весов следующую гирю; если же весы перешли в противоположное поло-

жение "меньше", то действия весовщика состоят из двух операций: 1) снять предыдущую гирию, после чего весы возвращаются в положение "больше"; 2) после возвращения весов в положение "больше" положить на правую чашу весов следующую гирию.

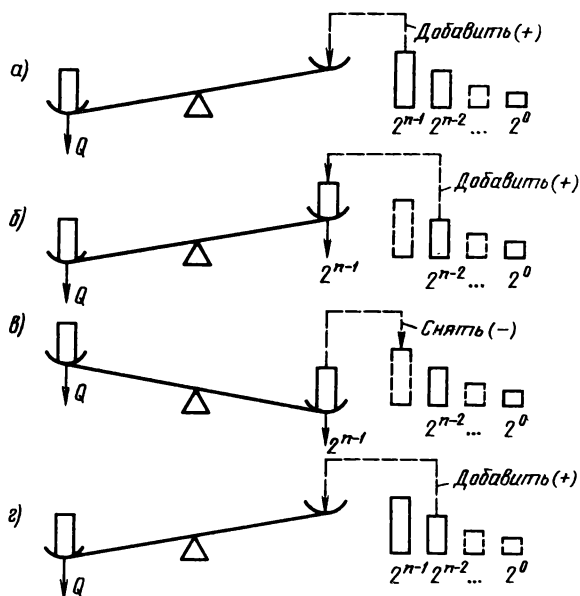


Рис. 2.1. Принцип асимметрии логики измерения

Следовательно, логика любого измерения (уравновешивания) с помощью "весовых гирь" "несимметрична" в том смысле, что предполагает различную степень сложности действий "весовщика" в зависимости от результата предыдущего сравнения; причем действия "весовщика" после получения сигнала "меньше" (правая чаша перевесила) оказываются "сложнее" по сравнению с его действиями после получения сигнала "больше" (весы остались в исходном положении).

Обнаруженное свойство измерения и составляет содержание так называемого принципа асимметрии логики измерения [14], который накладывает следующее ограничение на процедуру (алгоритм) измерения: после получения сигнала "меньше" предыдущая гирия должна быть снята с правой чаши весов и только после возвращения весов в другое крайнее положение "больше" на правую чашу добавляется следующая по старшинству гирия.

Таким образом, согласно указанному принципу запрещается одновременное выполнение в процессе измерения двух взаимоисключающих друг

друга операций: снятия и добавления гирь, что неявно предполагается, например, в классическом варианте задачи Баше—Менделеева.

Сложность действия "весовщика" после получения сигнала "меньше" определяется двумя факторами. Во-первых, он должен снять соответствующую гирю и, во-вторых, учесть время, затрачиваемое на "восстановление" весов в исходном положении. Введение *восстановительного периода* после получения нулевого результата сравнения и учет этого периода в математической модели измерения и его алгоритме и является центральной идеей алгоритмической теории измерения [14 – 16], вытекающей из принципа асимметрии логики измерения.

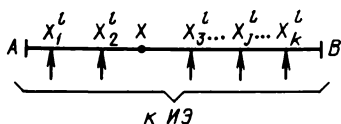
Введем в задачу о гирях принцип асимметрии логики измерения. Будем рассматривать измерение как процесс, протекающий в дискретные моменты времени и пусть операция "добавить гирю" выполняется за одну единицу дискретного времени, а операция "снять ее" (после которой происходит "восстановление" рычажных весов в исходном положении) – за p единиц дискретного времени, причем $p \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$

Ясно, что значение $p = 0$ соответствует классическому варианту задачи Баше—Менделеева, когда мы в своих рассуждениях пренебрегаем "асимметрией" сравнения. При остальных значениях p мы получаем другие варианты задачи о гирях, при решении которых должна учитываться "инерционность" весов p .

Дальнейшее обобщение задачи Баше—Менделеева состоит в увеличении количества рычажных весов от 1 до k (k – натуральное число), причем на левые чаши весов положен один и тот же груз Q . Требуется найти оптимальный в смысле Q_{\max} n -шаговый алгоритм взвешивания всех грузов $Q < Q_{\max}$ с помощью системы из k рычажных весов, обладающих "инерционностью" p , при условии, что на каждом шаге измерения гири разрешается класть на свободные чаши тех и только тех рычажных весов, которые на этом шаге находятся в исходном положении "больше".

2.3. КОНСТРУКТИВНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Для решения задач синтеза оптимальных n -шаговых алгоритмов измерения построим следующую математическую модель измерения (рис. 2.2). Пусть на отрезке AB находится некоторая точка X . Задача заключается в том, чтобы найти длину отрезка AX . Длина (мера) отрезка AX определяется с помощью системы, состоящей из k "индикаторных" элементов (ИЭ).



В результате приложение j -го ИЭ ($j = 1, 2, \dots, k$) на l -м шаге алгоритма ($l = 1, 2, \dots, n$) к некоторой точке $X_j' \in AB$ осуществляется "сравнение" отрезка AX

Рис. 2.2. Математическая модель измерения:
ИЭ – индикаторный элемент

и отрезка AX_j^I , т. е. определяется соотношение "меньше" ($<$) или "больше или равно" (\geq), в котором находятся сравниваемые отрезки AX и AX_j^I . Заметим, что указанное свойство ИЭ и является его основным определением.

Будем считать, что "выходной сигнал" или "показание" j -го ИЭ Y_j^I в точке X_j^I принимают значение 0, если имеет место соотношение $AX < AX_j^I$, и значение 1, если $AX \geq AX_j^I$, т. е.

$$Y_j^I = \begin{cases} 0, & \text{если } AX < AX_j^I; \\ 1, & \text{если } AX \geq AX_j^I. \end{cases} \quad (2.1)$$

Будем также считать, что j -й ИЭ находится "справа" от точки X , если в результате его приложения к некоторой точке X_j^I его показание приняло нулевое значение, и "слева" — в противном случае.

Заметим, что индикаторному элементу в построенной модели измерения соответствуют рычажные весы в задаче Баше—Менделеева, а отрезку AB (исходному интервалу неопределенности) соответствует диапазон измерения. Задача измерения отрезка AX в такой постановке сводится к сужению интервала неопределенности относительно точки X . Процесс измерения состоит в том, что на первом шаге измерения индикаторные элементы прикладываются к некоторым точкам исходного интервала неопределенности AB и при этом на основании показаний ИЭ интервал неопределенности сужается до некоторого нового отрезка $A_1B_1 \subset AB$, на всех последующих шагах индикаторные элементы прикладываются к точкам интервала неопределенности, выделенного на предыдущем шаге.

На процесс измерения могут накладываться некоторые условия или ограничения S (вытекающие, например, из принципа асимметрии логики измерения).

Система формальных правил, для каждого отрезка AX определяющая на каждом из n шагов измерения совокупность точек приложения k индикаторных элементов на основании показаний ИЭ на предыдущих шагах при ограничениях на измерение S , называется (n, k, S) -алгоритмом измерения.

Построенная модель измерения свела задачу измерения отрезка AX к задаче детерминированного одномерного поиска координаты точки X на отрезке AB с помощью k ИЭ за n шагов. Такой методический прием позволяет эффективно использовать идеи и принципы теории одномерного поиска [8] для строгого определения понятия оптимального (n, k, S) -алгоритма измерения.

В результате действия (n, k, S) -алгоритма на отрезке AB при заданном $X \in AB$ на последнем шаге алгоритма выделяется интервал неопределенности Δ , содержащий точку X . Рассматривая действие алгоритма для всех точек $X \in AB$ и выделяя все интервалы неопределенности, содержащие соответствующие точки X , получаем множество интервалов неопределенностей

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N, \quad (2.2)$$

образующих некоторое разбиение отрезка AB на N отрезков, причем $AB = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_N$.

Рассмотрим отношение $T_i = AB/\Delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), которое будем называть *точностью определения точки* X , принадлежащей интервалу Δ_i . Выберем из разбиения (2.2) наибольший интервал неопределенности Δ_{\max} . Отрезку Δ_{\max} соответствует наименьшая (т. е. "наихудшая") точность определения точки X

$$T_{\min} = AB/\Delta_{\max},$$

с помощью которой и будем оценивать эффективность действия (n, k, S) -алгоритма на отрезке AB .

Назовем *оптимальным* (n, k, S) -алгоритмом измерения такой (n, k, S) -алгоритм, который обеспечивает наибольшее значение T_{\min} .

Особый интерес представляет случай, когда (n, k, S) -алгоритм разбивает отрезок AB на N равных интервалов, т. е.

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_N = AB/N.$$

В этом случае $T_{\min} = N$, т. е. наименьшая точность определения точки X численно равна количеству уровней квантования N , а задача синтеза оптимального (n, k, S) -алгоритма сводится в этом случае к нахождению (n, k, S) -алгоритма, обеспечивающего наибольшее число уровней квантования N .

2. Ограничимся классом n -шаговых алгоритмов измерения, осуществляющих равномерное разбиение отрезка AB на N интервалов. Ясно, что N является некоторой функцией от числа шагов алгоритма n и числа индикаторных элементов k , участвующих в измерении, т. е.

$$N = F(n, k).$$

В технике аналого-цифрового преобразования широкое распространение получили следующие алгоритмы измерения:

алгоритм последовательного счета, в котором за n шагов с помощью одного ИЭ ($k = 1$) отрезок AB разбивается на $n + 1$ равных частей, т. е. в данном случае

$$N = F_1(n, 1) = n + 1; \quad (2.3)$$

алгоритм поразрядного кодирования, в котором за n шагов отрезок AB с помощью одного ИЭ ($k = 1$) разбивается на 2^n равных частей, т. е.

$$N = F_2(n, 1) = 2^n; \quad (2.4)$$

алгоритм считывания, состоящий из одного шага ($n = 1$), при этом с помощью k ИЭ отрезок AB разбивается на $k + 1$ равных частей, т. е.

$$N = F_3(1, k) = k + 1. \quad (2.5)$$

На языке построенной выше математической модели измерения действие 3-шагового алгоритма поразрядного кодирования на отрезке $[0,8]$ состоит в следующем (рис. 2.3):

1-й шаг: ИЭ прикладывается к точке 4 (рис. 2.3, а);

2-й шаг: в зависимости от показания ИЭ в точке 4 выделяется два интервала неопределенности: $[0,4]$ (рис. 2.3, б) и $[4,8]$ (рис. 2.3, в), при этом 2-й шаг алгоритма состоит в приложении ИЭ либо к точке 2 (рис. 2.3, б), либо к точке 6 (рис. 2.3, в).

3-й шаг: после 2-го шага в зависимости от показаний ИЭ может быть выделено 4 интервала неопределенности $[0,2]$ (рис. 2.3, з), $[2,4]$ (рис. 2.3, д), $[4,6]$ (рис. 2.3, е), $[6,8]$ (рис. 2.3, ж); при этом 3-й шаг состоит в приложении ИЭ к середине соответствующего интервала неопределенности, т. е. к точкам 1, 3, 5, 7.

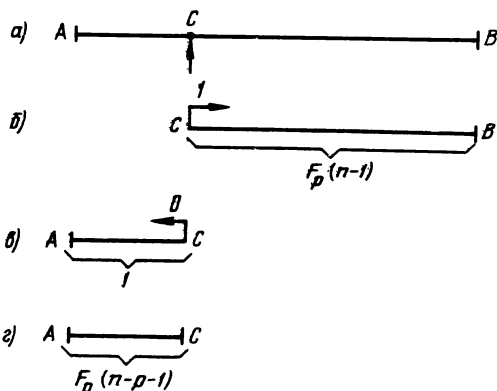
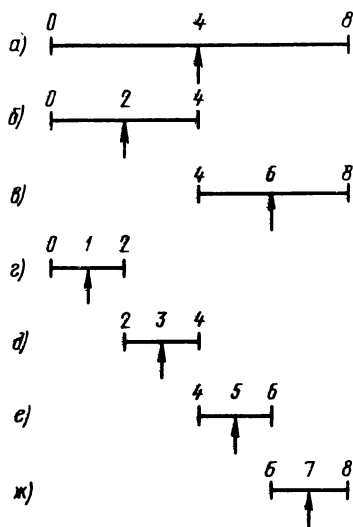


Рис. 2.3. Алгоритм поразрядного кодирования

Рис. 2.4. "Фибоначчиев" алгоритм измерения

Заметим, что построенная выше математическая модель измерения имеет ограниченный характер и распространяется только на такие АЦП, в которых функционирование устройства сравнения (в математической модели — индикаторного элемента) описывается математическим выражением (2.1). Поэтому за рамки этой модели выходят АЦП считывания, использующие двоично-кодированные шкалы (например, в коде Грея). В основе двоично-кодированных шкал лежит более сложный тип индикаторного элемента, называе-

мый *многопороговым индикаторным элементом*. Основы теории построения АЦП считывания на многопороговых индикаторных элементах изложены в работе [15].

2.4. "ФИБОНАЧЧИЕВЫ" АЛГОРИТМЫ ИЗМЕРЕНИЯ

1. С использованием построенной выше математической модели измерения синтезирован широкий класс новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения. Детальное изложение этих результатов дано в [15, 16].

В настоящей монографии ограничимся подробным рассмотрением класса "фибоначчиевых" алгоритмов измерения, представляющих наибольший с нашей точки зрения интерес. Эти алгоритмы возникают, если ввести следующие ограничения на измерение, вытекающее из принципа асимметрии логики измерения (рис. 2.4): если на некотором шаге измерения ИЭ был приложен к точке C и оказался "слева" от точки X , то на следующем шаге он может быть приложен к любой точке отрезка CB . Если же он оказался "справа" от точки X (т. е. показание ИЭ в точке C равно 0), то в течение последующих p шагов запрещается приложение этого ИЭ к точкам отрезка AC . Ясно, что с помощью такого запрета в задаче Баше—Менделеева учитывается время, затрачиваемое рычажными весами на переход из положения "меньше" в положение "больше" (см. рис. 2.1, в), который осуществляется за p единиц дискретного времени.

Предположим, что при заданном $p \geq 0$ существует оптимальный n -шаговый алгоритм измерения, разбивающий отрезок AB на $F_p(n)$ равных интервалов единичной длины, т. е.

$$AB = F_p(n).$$

Пусть первый шаг оптимального n -шагового алгоритма состоит в приложении ИЭ к некоторой точке C (рис. 2.4, а). Тогда в зависимости от взаимного расположения точек X и C могут возникнуть две ситуации, изображенные на рис. 2.4, б и рис. 2.4, в, г. Если точка C оказывается слева от точки X , т. е. ИЭ "показал вправо" (рис. 2.4, б), то интервал неопределенности сужается до отрезка CB . Так как в распоряжении алгоритма осталось $(n - 1)$ шагов, то, действуя оптимальным $(n - 1)$ -шаговым алгоритмом на отрезке CB , по индуктивному предположению его можно разбить на $F_p(n - 1)$ равных интервалов единичной длины, т. е.

$$CB = F_p(n - 1).$$

Если же точка C оказалась справа от точки X , т. е. ИЭ "показал влево" (рис. 2.4, в, г), то интервал неопределенности сужается до отрезка AC , а в течение p последующих шагов (дискретных моментов времени) запрещается прикладывать ИЭ к точкам отрезка AC . В зависимости от соотношения между n и p решение задачи синтеза оптимального алгоритма измерения для этого случая разобьем на две части.

Пусть $n \leq p + 1$. В этом случае после первого шага измерения в распоряжении алгоритма остается $n - 1$ шагов, а так как $p \geq n - 1$, то измерение фактически заканчивается после первого шага. Ясно, что для выполнения условия разбиения отрезка AB на $F_p(n)$ равных интервалов единичной длины отрезок AC и должен быть отрезком единичной длины, т. е. $AC = 1$ (см. рис. 2.4, в).

Из проведенных рассуждений вытекает следующая рекуррентная формула для вычисления функции $F_p(n)$ для случая $n \leq p + 1$:

$$F_p(n) = F_p(n - 1) + 1. \quad (2.6)$$

Введем следующее определение:

$$F_p(0) = 1. \quad (2.7)$$

Раскладывая $F_p(n - 1)$ в формуле (2.6) по той же рекуррентной формуле n раз, с учетом выражения (2.7) получаем следующее выражение для функции $F_p(n)$:

$$F_p(n) = n + 1. \quad (2.8)$$

Переходя к системе гирь, заметим, что оптимальная система гирь в этом случае состоит из n единичных гирь $\{1, 1, \dots, 1\}$, а оптимальный n -шаговый алгоритм взвешивания состоит в том, что на каждом шаге измерения очередная единичная гиря кладется на правую чашу весов и этот процесс продолжается либо до исчерпания всех гирь, либо до получения нулевого результата сравнения (весы перешли в состояние "меньше"). Указанный алгоритм измерения, как уже упоминалось, получил широкое распространение в технике аналого-цифрового преобразования под названием *алгоритма последовательного счета*.

Пусть теперь $n > p + 1$. В этом случае по истечении p дискретных моментов времени ИЭ можно прикладывать к точкам отрезка AC (см. рис. 2.4, г). Так как в распоряжении алгоритма осталось $(n - p - 1)$ шагов (один шаг израсходован на первое сравнение, а p шагов — на запрет), то действуя оптимальным $(n - p - 1)$ -шаговым алгоритмом на отрезке AC , по индуктивному предположению его можно разбить на $F_p(n - p - 1)$ равных интервалов единичной длины, т. е.

$$AC = F_p(n - p - 1).$$

Из приведенных рассуждений вытекает следующая рекуррентная формула для вычисления функции $F_p(n)$ для случая $n > p + 1$:

$$F_p(n) = F_p(n - 1) + F_p(n - p - 1). \quad (2.9)$$

Объединяя формулы (2.6), (2.8) и (2.9), получаем следующую рекуррентную формулу для вычисления функции $F_p(n)$ в общем случае:

$$F_p(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{при } n \leq p + 1; \\ F_p(n - 1) + F_p(n - p - 1) & \text{при } n > p + 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Для перехода к системе гирь введем следующие обозначения. Обозначим вес "старшей" гири через $\varphi_p(n-1)$, а вес "младшей", единичной гири через $\varphi_p(0) = 1$. Тогда при $n > p+1$ система весовых гирь для реализации оптимального n -шагового алгоритма измерения состоит из n гирь

$$\varphi_p(0), \varphi_p(1), \dots, \varphi_p(p+1), \dots, \varphi_p(n-1),$$

причем первые $(p+1)$ гирь (со стороны "младшей" гири) имеют единичный вес, т. е.

$$\varphi_p(0) = \varphi_p(1) = \dots = \varphi_p(p) = 1, \quad (2.11)$$

а каждая последующая гиря $\varphi_p(l)$, где $l > p$, вычисляется по рекуррентной формуле:

$$\varphi_p(l) = \varphi_p(l-1) + \varphi_p(l-p-1). \quad (2.12)$$

Нетрудно доказать, что между функцией $F_p(n)$, задаваемой выражением (2.10), и функцией $\varphi_p(l)$, задаваемой выражениями (2.11), (2.12), существует следующая связь:

$$F_p(n) = \varphi_p(n+p).$$

Таким образом, при заданном $p \geq 0$ оптимальный n -шаговый алгоритм измерения с помощью системы гирь

$$\varphi_p(0), \varphi_p(1), \dots, \varphi_p(n-1)$$

осуществляет разбиение отрезка AB на $\varphi_p(n+p)$ равных интервалов единичной длины.

Сравнивая (2.11) и (2.12) с (1.40) и (1.42), легко убедиться в том, что при заданном p оптимальная система гирь задается с помощью p -чисел Фибоначчи. На этом основании будем называть синтезированные выше алгоритмы измерения "фибоначчиевыми" алгоритмами.

Рассмотрим частные случаи "фибоначчиевых" алгоритмов измерения. Пусть $p = 0$. В этом случае система весовых гирь является двоичной, а "фибоначчиев" алгоритм совпадает с алгоритмом поразрядного кодирования.

Пусть $p = \infty$. В этом случае система весовых гирь состоит из n единичных гирь $\{1, 1, \dots, 1\}$, а "фибоначчиев" алгоритм совпадает с алгоритмом последовательного счета. Зададимся $p = 1$ и рассмотрим действие такого n -шагового "фибоначчиевого" алгоритма на отрезке AB . Для этого вычислим значения функций $F_1(n)$ и $\varphi_1(n)$ по рекуррентным формулам (2.10)–(2.12):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(n)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$\varphi_1(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Оптимальный n -шаговый алгоритм измерения разбивает отрезок AB на $F_1(n)$ частей; это осуществляется с помощью системы весовых гирь $\varphi_1(0)$, $\varphi_1(1)$, ..., $\varphi_1(n-1)$. Например, 5-шаговый алгоритм измерения разбивает отрезок AB на $F_1(5) = 13$ частей; при этом используется система из 5 гирь: 1, 1, 2, 3, 5. Рассмотрим первые 2 шага указанного 5-шагового алгоритма измерения, действующего на отрезке $[0, 13]$ (рис. 2.5):

1-й шаг: ИЭ прикладывается к точке 5, разбивающей отрезок $[0, 13]$ в "фибоначчиевом" отношении $5 + 8$ (рис. 2.5, а).

2-й шаг: а) Если ИЭ показал "вправо" (показание 1), то интервал неопределенности сужается до отрезка $[5, 13]$ (рис. 2.5, б) и на 2-м шаге ИЭ прикладывается к точке 8, разбивающей отрезок $[5, 13]$ в "фибоначчиевом" отношении $3 + 5$.

б) Если ИЭ показал "влево" (показание 0), то интервал неопределенности сужается до отрезка $[0, 5]$ (рис. 2.5, в) и на 2-м шаге запрещается прикладывать ИЭ к точкам отрезка $[0, 5]$. В этой ситуации 3-й шаг состоит в приложении ИЭ к точке 2, разбивающей отрезок $[0, 5]$ в "фибоначчиевом" отношении $2 + 3$ (см. рис. 2.5, в).

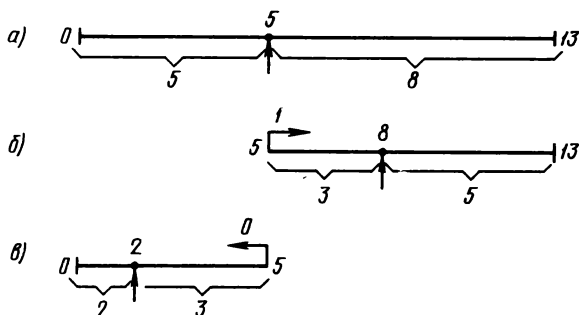


Рис. 2.5. Пример "фибоначчиевого" алгоритма измерения

Последующие шаги "фибоначчиевого" алгоритма аналогичны первым двум шагам и состоят в разбиении интервалов неопределенности каждый раз в "фибоначчиевом" отношении.

2. В общем случае измерение осуществляется с помощью k ИЭ, каждый из которых на l -м шаге находится в состоянии $p_j(l)$. Состояние $p_j(l)$ имеет следующую физическую интерпретацию. Если на l -м шаге j -е рычажные весы, соответствующие j -му ИЭ, находятся в исходном положении "больше", то считается, что $p_j(l) = 0$. Если же j -й ИЭ на некотором шаге оказался справа от точки X , то считается, что $p_j(l) = p$, где p — заданное целое число, характеризующее "инерционность" рычажных весов.

Если $p_j(l) > 0$, то такой ИЭ нельзя прикладывать к отрезку AB . Начи-

ная с $(l + 1)$ -го шага состояние j -го ИЭ с каждым шагом уменьшается на единицу, т. е.

$$p_j(l + 1) = p_j(l) - 1,$$

и как только состояние ИЭ принимает значение 0, этот ИЭ прикладывается к отрезку AB .

Обозначим состояние ИЭ на 1-м шаге через p_1, p_2, \dots, p_k и пусть первые t ИЭ находятся в состоянии 0, т. е.

$$p_1 = p_2 = \dots = p_t = 0,$$

а начиная с $(t + 1)$ -го ИЭ, их состояния больше нуля, причем

$$p_k \geq p_{k-1} \geq \dots \geq p_{t+1} > 0.$$

Доказано [15, 16], что оптимальный n -шаговый алгоритм измерения в этом случае описывается следующей рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} F_p(n; \underbrace{0, 0, \dots, 0}_t, p_{t+1}, \dots, p_k) = \\ = \sum_{j=0}^t F_p(n-1; \underbrace{0, 0, \dots, 0}_j, p_{t+1}-1, \dots, p_k-1, \underbrace{p, p, \dots, p}_{t-j}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

причем

$$F_p(1; \underbrace{0, 0, \dots, 0}_t, p_{t+1}, \dots, p_k) = t + 1. \quad (2.14)$$

Рекуррентное соотношение (2.13) при начальном условии (2.14) и является основным результатом алгоритмической теории измерения, с помощью которого в обобщенном виде для любых n, k, p и начальных состояний p_1, p_2, \dots, p_k задается оптимальный алгоритм измерения.

Оказалось, что рекуррентное соотношение (2.13) включает в себя в качестве частных случаев ряд замечательных формул дискретной математики.

В частности, при $p = 0$ его решением является формула

$$F_0(n; \underbrace{0, 0, \dots, 0}_k) = (k + 1)^n.$$

Соответствующий этому случаю n -шаговый алгоритм измерения состоит в последовательном разбиении на каждом шаге исходного интервала неопределенности AB (и всех последующих интервалов неопределенности) на $k + 1$ равных интервалов с помощью k ИЭ. Такой алгоритм измерения порождает все позиционные системы счисления с основанием $q = k + 1$, в частности двоичную систему счисления при $k = 1$ и десятичную — при $k = 9$.

При $p = \infty$ и $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 0$ решением (2.13) является формула, задающая биномиальные коэффициенты, т. е.

$$F_p(n; \underbrace{0, 0, \dots, 0}_k) = C_{n+k}^k = C_{n+k}^n,$$

а соответствующий этому случаю алгоритм измерения порождает способ нумерации натуральных чисел с помощью биномиальных коэффициентов.

Наконец, при $k = 1$ и произвольном $p \geq 0$ оптимальный алгоритм измерения совпадает с "фибоначчиевым" алгоритмом, а рекуррентная формула (2.13) сводится к рекуррентной формуле (2.9).

3. Основной результат алгоритмической теории измерения демонстрируется с помощью рис. 2.6. "Неожиданность" полученного результата состоит в том, что решением обобщенного варианта задачи Баше—Менделеева, с учетом принципа асимметрии логики измерения, оказалось весьма общее рекуррентное соотношение (2.13), которое при начальных условиях (2.14), включает в качестве частных случаев комбинаторные формулы для числа размещений с повторениями $(k + 1)^n$, для биномиальных коэффициентов C_{n+k}^k , для двоичного и натурального рядов чисел, а также рекуррентное соотношение Фибоначчи.

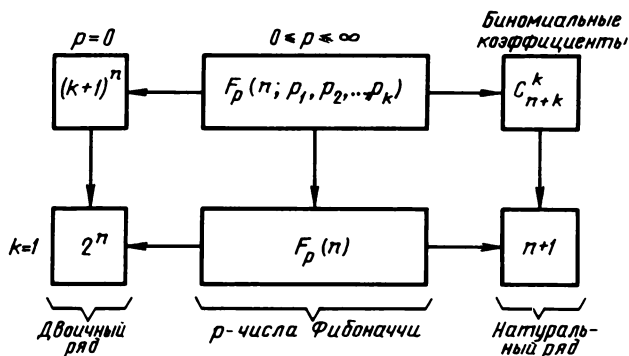


Рис. 2.6. Основной результат алгоритмической теории измерения

Полученный результат сам по себе представляет интерес как для комбинаторики, так и для теории чисел, однако, возможно, он может привести к более глубоким выводам методологического характера, если учесть, что "при своем зарождении понятие числа, ставшее затем основой арифметики, не только имело конкретный характер, но и было неотделимо от понятия измерения, легшего позднее в основу геометрии. В процессе дальнейшего развития математики эти понятия все больше дифференцируются и вместе с тем каждый раз на новом, высшем этапе происходит их объединение" [33, с. 16].

С проблемой математических алгоритмов измерения тесно связано развитие математической теории систем счисления, так как каждый алгоритм измерения порождает некоторый способ представления числа, являющегося результатом измерения.

Существует две концепции происхождения систем счисления: счетная и метрологическая. Концепция "пальцевого" счета достаточно убедительно объясняет происхождение десятичной, 5-ричной, наконец, 20-ричной системы счисления, однако сталкивается с большими трудностями при объяснении происхождения систем счисления с "непальцевыми" основаниями, в частности вавилонской 60-ричной системы счисления. Пытаясь преодолеть это затруднение, немецкий историк математики Нейгебауер в 1927 г. выдвинул гипотезу о метрологическом, измерительном происхождении позиционных систем счисления [34]. Основная идея Нейгебауера состоит в том, что каждой позиционной системе счисления предшествовал длительный исторический этап в развитии системы мер веса и связанной с ней денежной системы. В частности, система счисления с основанием 60 есть продукт 60-ричной системы мер, возникшей в Древнем Вавилоне в силу ряда исторических обстоятельств. При этом, как подчеркивает Нейгебауер, "возникновение такой системы из первоначально конкретной системы мер веса связано с позиционным обозначением. Это позиционное обозначение есть не что иное, как систематический отказ от обозначения единиц меры при письме" [34, с. 124].

Главная мысль, вытекающая из гипотезы Нейгебауера, состоит в том, что новые идеи в развитии позиционных систем счисления следует искать в теории измерения. Развитию этой идеи посвящены главы 3 и 4 настоящей монографии.

Глава 3

"ФИБОНАЧЧИЕВЫ" СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

3.1. ПОНЯТИЕ p -КОДА ФИБОНАЧЧИ

1. Доказанная в гл. 2 возможность измерения величин с помощью p -чисел Фибоначчи эквивалентна утверждению о возможности представления любого натурального числа N в виде

$$N = a_{n-1} \varphi_p(n-1) + a_{n-2} \varphi_p(n-2) + \dots + a_0 \varphi_p(0), \quad (3.1)$$

где $a_l \in \{0,1\}$ — двоичная цифра в l -м разряде кода (3.1); $\varphi_p(l)$ — вес l -го разряда, вычисляемый по рекуррентной формуле (1.43); $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Представление натурального числа N в виде (3.1) в дальнейшем будем называть p -кодом Фибоначчи числа N . Сокращенная запись p -кода Фибоначчи числа N имеет вид

$$N = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0.$$

Заметим, что понятие " p -код Фибоначчи", определяемое выражением (3.1), включает теоретически бесконечное число способов нумерации на-

туральных чисел, так как каждому $p \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ соответствует свой p -код Фибоначчи. Рассмотрим крайние частные случаи p -кода Фибоначчи.

Пусть $p = 0$. В этом случае p -числа Фибоначчи совпадают с двоичными числами, т. е. $\varphi_p(i) = 2^i$, и выражение (3.1) принимает вид

$$N = a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \dots + a_0 2^0. \quad (3.2)$$

Пусть $p = \infty$. В этом случае каждое p -число Фибоначчи тождественно равно 1, т. е. $\varphi_p(l) = 1$ для любого l , и выражение (3.1) принимает вид

$$N = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_N.$$

Таким образом, понятие p -кода Фибоначчи является весьма широким обобщением понятия классического двоичного кода (3.2) и включает его в качестве крайнего частного случая ($p = 0$); при этом p -коды Фибоначчи как бы заполняют пробел между классическим двоичным кодом ($p = 0$) и "унитарным" кодом ($p = \infty$).

2. Рассмотрим множество n -разрядных двоичных слов, количество которых равно 2^n . В классическом двоичном коде ($p = 0$) отображение множества n -разрядных двоичных слов на множество натуральных чисел

$$N = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$$

обладает следующими свойствами:

1. Свойство однозначности отображения, т. е. каждому числу N соответствует одно и притом единственное двоичное слово и наоборот.

2. С помощью n -разрядного двоичного кода можно представить все целые числа в диапазоне от 0 до $2^n - 1$, т. е. диапазон представления равен 2^n .

Число 0 и максимальное число $2^n - 1$ представляются в классической двоичной системе счисления следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \ 0 \quad \quad 0 \\ 2^n - 1 & = & 1 \ 1 \dots 1 \end{array}$$

Для выяснения структуры отображения множества двоичных слов на множество натуральных чисел в p -коде Фибоначчи при $p > 0$ рассмотрим это отображение на примере 5-разрядных двоичных слов.

Пусть $p = 1$. Тогда указанное отображение имеет следующий вид (табл. 3.1, КК — кодовая комбинация):

Т а б л и ц а 3.1

Наименование КК	Веса разрядов					N		Наименование КК	Веса разрядов					N
	5	3	2	1	1				5	3	2	1	1	
A_0	0	0	0	0	0	0		A_2	0	0	0	1	0	1
A_1	0	0	0	0	1	1		A_3	0	0	0	1	1	2

Наименование КК	Веса разрядов					N	Наименование КК	Веса разрядов					N
	5	3	2	1	1			5	3	2	1	1	
A_4	0	0	1	0	0	2	A_{18}	1	0	0	1	0	6
A_5	0	0	1	0	1	3	A_{19}	1	0	0	1	1	7
A_6	0	0	1	1	0	3	A_{20}	1	0	1	0	0	7
A_7	0	0	1	1	1	4	A_{21}	1	0	1	0	1	8
A_8	0	1	0	0	0	3	A_{22}	1	0	1	1	0	8
A_9	0	1	0	0	1	4	A_{23}	1	0	1	1	1	9
A_{10}	0	1	0	1	0	4	A_{24}	1	1	0	0	0	8
A_{11}	0	1	0	1	1	5	A_{25}	1	1	0	0	1	9
A_{12}	0	1	1	0	0	5	A_{26}	1	1	0	1	0	9
A_{13}	0	1	1	0	1	6	A_{27}	1	1	0	1	1	10
A_{14}	0	1	1	1	0	6	A_{28}	1	1	1	0	0	10
A_{15}	0	1	1	1	1	7	A_{29}	1	1	1	0	1	11
A_{16}	1	0	0	0	0	5	A_{30}	1	1	1	1	0	11
A_{17}	1	0	0	0	1	6	A_{31}	1	1	1	1	1	12

В табл. 3.2 приведено отображение множества 5-разрядных двоичных слов на множество натуральных чисел в p -коде Фибоначчи при $p = 2$.

Таблица 3.2

Наименование КК	Веса разрядов					N	Наименование КК	Веса разрядов					N
	3	2	1	1	1			3	2	1	1	1	
A_0	0	0	0	0	0	0	A_{16}	1	0	0	0	0	3
A_1	0	0	0	0	1	1	A_{17}	1	0	0	0	1	4
A_2	0	0	0	1	0	1	A_{18}	1	0	0	1	0	4
A_3	0	0	0	1	1	2	A_{19}	1	0	0	1	1	5
A_4	0	0	1	0	0	1	A_{20}	1	0	1	0	0	4
A_5	0	0	1	0	1	2	A_{21}	1	0	1	0	1	5
A_6	0	0	1	1	0	2	A_{22}	1	0	1	1	0	5
A_7	0	0	1	1	1	3	A_{23}	1	0	1	1	1	6
A_8	0	1	0	0	0	2	A_{24}	1	1	0	0	0	5
A_9	0	1	0	0	1	3	A_{25}	1	1	0	0	1	6
A_{10}	0	1	0	1	0	3	A_{26}	1	1	0	1	0	6
A_{11}	0	1	0	1	1	4	A_{27}	1	1	0	1	1	7
A_{12}	0	1	1	0	0	3	A_{28}	1	1	1	0	0	6
A_{13}	0	1	1	0	1	4	A_{29}	1	1	1	0	1	7
A_{14}	0	1	1	1	0	4	A_{30}	1	1	1	1	0	7
A_{15}	0	1	1	1	1	5	A_{31}	1	1	1	1	1	8

Анализ табл. 3.1 и 3.2 позволяет установить следующие особенности кодирования натуральных чисел в p -коде Фибоначчи. С помощью 5-разрядного двоичного кода в 1-коде Фибоначчи можно представить 13 натуральных чисел от 0 до 12 включительно, причем 13 есть 6-е 1-число Фибоначчи $\varphi_1(6) = 13$, а в 2-коде Фибоначчи — 9 натуральных чисел от 0 до 8 включительно, причем 9 есть 7-е 2-число Фибоначчи $\varphi_2(7) = 9$. Результат проведенного анализа есть частный случай следующей теоремы, которая приводится без доказательства.

Теорема 3.1 При заданных целых $n \geq 0$ и $p \geq 0$ с помощью n -разрядного p -кода Фибоначчи можно представить $\varphi_p(n+p)$ натуральных чисел от 0 до $\varphi_p(n+p) - 1$ включительно.

Заметим, что при $p = 0$ $\varphi_p(n+p) = 2^n$, и утверждение теоремы 3.1 сводится к известному из классической двоичной арифметики положению о диапазоне двоичного n -разрядного представления чисел от 0 до $2^n - 1$.

Вторая особенность кодирования натуральных чисел в p -коде Фибоначчи при $p > 0$ состоит в множественности представления чисел. За исключением числа 0 и максимального числа $\varphi_p(n+p) - 1$, равного 12 при $p = 1$ и $n = 5$ (табл. 3.1), или 8 при $p = 2$ и $n = 5$ (табл. 3.2), все остальные натуральные числа из табл. 3.1, 3.2 имеют множественное кодовое представление, т. е. каждому числу соответствует некоторое множество кодовых представлений:

$$p = 1$$

$$\begin{aligned} 0 &= \{A_0\} \\ 1 &= \{A_1, A_2\} \\ 2 &= \{A_3, A_4\} \\ 3 &= \{A_5, A_6, A_8\} \\ 4 &= \{A_7, A_9, A_{10}\} \\ 5 &= \{A_{11}, A_{12}, A_{16}\} \\ 6 &= \{A_{13}, A_{14}, A_{17}, A_{18}\} \\ 7 &= \{A_{15}, A_{19}, A_{20}\} \\ 8 &= \{A_{21}, A_{22}, A_{24}\} \\ 9 &= \{A_{23}, A_{25}, A_{26}\} \\ 10 &= \{A_{27}, A_{28}\} \\ 11 &= \{A_{29}, A_{30}\} \\ 12 &= \{A_{31}\} \end{aligned}$$

$$p = 2$$

$$\begin{aligned} 0 &= \{A_0\} \\ 1 &= \{A_1, A_2, A_4\} \\ 2 &= \{A_3, A_5, A_6, A_8\} \\ 3 &= \{A_7, A_9, A_{10}, A_{12}, A_{16}\} \\ 4 &= \{A_{11}, A_{13}, A_{14}, A_{17}, A_{18}, A_{20}\} \\ 5 &= \{A_{15}, A_{19}, A_{21}, A_{22}, A_{24}\} \\ 6 &= \{A_{23}, A_{25}, A_{26}, A_{28}\} \\ 7 &= \{A_{27}, A_{29}, A_{30}\} \\ 8 &= \{A_{31}\} \end{aligned}$$

Заметим, что при любом $p \geq 0$ максимальное число $\varphi_p(n+p) - 1$ в n -разрядном p -коде Фибоначчи изображается следующим образом:

$$\varphi_p(n+p) - 1 = \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_n,$$

что вытекает из равенства (1.45).

3. Различные кодовые представления одного и того же числа в p -коде Фибоначчи могут быть получены друг из друга с помощью специфических преобразований кодовых комбинаций, называемых операциями свертки и развертки двоичных разрядов. Эти операции вытекают из основного рекуррентного соотношения (1.43), связывающего веса двоичных разрядов в p -коде Фибоначчи, и состоят в следующем.

Пусть задано некоторое представление числа N в p -коде Фибоначчи, причем цифры l -го, $(l - 1)$ -го и $(l - p - 1)$ -го разрядов в этом кодовом представлении соответственно равны 0, 1, 1, т. е.

$$N = a_{n-1} \dots a_{l+1} 0 1 a_{l-2} \dots a_{l-p} 1 a_{l-p-2} \dots a_0. \quad (3.3)$$

Данное кодовое представление можно перевести в другое кодовое представление этого же числа N , если в соответствии с рекуррентным соотношением (1.43), единицы в $(l - 1)$ -м и $(l - p - 1)$ -м разрядах кодовой комбинации (3.3) заменить на нули, а ноль в l -м разряде заменить на 1, т. е.

$$N = \begin{cases} a_{n-1} \dots a_{l+1} \overbrace{0 1 a_{l-2} \dots a_{l-p} 1}^{a_{l-1}} a_{l-p-2} \dots a_0; \\ a_{n-1} \dots a_{l+1} 1 0 a_{l-2} \dots a_{l-p} 0 a_{l-p-2} \dots a_0. \end{cases}$$

Такое преобразование кодового представления (3.3) будем называть *сверткой* $(l - 1)$ -го и $(l - p - 1)$ -го разрядов в l -й разряд или сокращенно *сверткой разрядов*.

Операцию свертки будем обозначать с помощью стрелки $\overbrace{\uparrow \quad \uparrow}^{\quad}$, которая начинается в $(l - 1)$ -м и $(l - p - 1)$ -м разрядах и заканчивается в l -м разряде.

Исходное кодовое представление числа N можно восстановить, если в новом кодовом представлении выполнить операцию развертки l -го разряда в $(l - 1)$ -й и $(l - p - 1)$ -й разряды, которая заключается в замене 1 в l -м разряде на 0 и нулей в $(l - 1)$ -м и $(l - p - 1)$ -м разрядах на 1, т. е.

$$N = \begin{cases} a_{n-1} \dots a_{l+1} \overbrace{1 0 a_{l-2} \dots a_{l-p} 0}^{a_{l-1}} a_{l-p-2} \dots a_0; \\ a_{n-1} \dots a_{l+1} 0 1 a_{l-2} \dots a_{l-p} 1 a_{l-p-2} \dots a_0. \end{cases}$$

Операцию развертки разряда будем обозначать с помощью стрелки $\underbrace{\uparrow \quad \uparrow}_{\quad}$, которая начинается в l -м разряде кода и заканчивается в его $(l - 1)$ -м и $(l - p - 1)$ -м разрядах. Из определения операций свертки и развертки двоичных разрядов вытекает, что их выполнение в кодовом представлении не изменяет отображаемого кодом числа.

В рассмотренных ниже примерах с помощью операций свертки и развертки осуществляется получение всех кодовых изображений чисел в p -коде Фибоначчи.

Пример 3.1. Выполнить все операции развертки в следующем 1-коде Фибоначчи:

55 =	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
55 =										
	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
55 =										
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Пример 3.2. Выполнить все операции свертки в следующем 1-коде Фибоначчи:

88 =	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
88 =										
	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
88 =										
	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Любопытно отметить, что денежные системы многих стран (в частности, СССР) широко используют "принцип Фибоначчи" для образования "оптимальной" системы денежных единиц. Например, начальный ряд монет, принятых в СССР, соответствует ряду Фибоначчи: 1, 2, 3, 5. Выбор такого монетного ряда обусловлен прежде всего удобством размена монет ($5 = 3 + 2$, $3 = 2 + 1$, $2 = 1 + 1$). При этом размену монет как раз и соответствуют операции свертки и развертки в коде Фибоначчи. Так же, как и при размене монет, сумма отображаемых денег не изменяется, выполнение в коде Фибоначчи операций свертки и развертки разрядов не изменяет отображаемого кодом числа.

Процедуру, заключающуюся в выполнении в p -коде Фибоначчи всех возможных операций развертки (свертки) двоичных разрядов, в дальнейшем будем называть *разверткой (сверткой) p -кода Фибоначчи*, а получаемые при этом кодовые изображения будем называть *развернутым (свернутым) изображением*.

Нетрудно показать, что при $p = 1$ развернутое и свернутое кодовые изображения единственны и обладают следующими характерными признаками: в развернутом изображении, начиная со старшего значащего разряда, двух нулей рядом в коде не встречается, а в свернутом — двух единиц рядом в коде не встречается.

Важное значение при технической реализации имеет правило инверсии операций свертки и развертки двоичных разрядов в p -коде Фибоначчи, которое формулируется следующим образом: свертка двоичных разрядов эквивалентна развертке инверсий тех же разрядов.

С помощью правила инверсии развертка 1-кода Фибоначчи может быть выполнена путем свертки инверсного кода.

В частности, развертка кода Фибоначчи числа 55 из примера 3.1 с помощью правила инверсии может быть выполнена следующим образом:

1. Проинвертировать исходный код:

$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

2. Осуществить свертку инверсного кода:

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
↑									
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
		↑							
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
				↑					
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
						↑			
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
								↑	
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

3. Проинвертировать полученный код:

$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

3.2. МИНИМАЛЬНАЯ ФОРМА И ИЗБЫТОЧНОСТЬ p -КОДОВ ФИБОНАЧЧИ

1. Важное значение для теории p -кодов Фибоначчи имеет следующая теорема.

Теорема 3.2. При заданном целом $p \geq 0$ и $n \geq p$ для любого натурального N существует одно и притом единственное представление N в виде

$$N = \varphi_p(n) + r, \quad (3.4)$$

где

$$0 \leq r < \varphi_p(n - p). \quad (3.5)$$

Для доказательства теоремы 3.2 заметим, что ряд p -чисел Фибо-

начи, начиная с $n = p$, является строго возрастающим рядом чисел $\varphi_p(p)$, $\varphi_p(p+1), \dots, \varphi_p(n), \varphi_p(n+1)$, в котором для любого натурального N всегда можно выбрать такую единственную пару соседних p -чисел Фибоначчи $\varphi_p(n), \varphi_p(n+1)$, которые связаны с числом N следующим неравенством:

$$\varphi_p(n) \leq N < \varphi_p(n+1). \quad (3.6)$$

Вычитая $\varphi_p(n)$ из всех членов неравенства (3.6), получаем $0 \leq N - \varphi_p(n) < \varphi_p(n+1) - \varphi_p(n)$, откуда вытекает, что $N = \varphi_p(n) + r$, причем $0 \leq r < \varphi_p(n+1) - \varphi_p(n) = \varphi_p(n-p)$.

Теорема доказана.

Раскладывая число N и все возникающие при этом остатки r по формулам (3.4), (3.5) до получения нулевого остатка, получаем характерное представление числа N в p -коде Фибоначчи, в котором после каждого единичного разряда $a_l = 1$ в сторону младших разрядов следует не менее p нулевых разрядов $a_{l-1} = a_{l-2} = \dots = a_{l-p} = 0$. Такое представление числа N называется минимальной формой числа N в p -коде Фибоначчи. Это название отражает тот факт, что при $p = 1$ в множестве кодовых представлений числа N в p -коде Фибоначчи минимальная форма содержит наименьшее число единиц.

Например, раскладывая число 25 по p -числам Фибоначчи при $p = 1$ и $p = 2$, получаем следующие его минимальные формы в соответствующих p -кодах Фибоначчи (табл. 3.3).

Т а б л и ц а 3.3

Для	Вес раз-	21	13	8	5	3	2	1	1
	ряда								
$p=1$	$N=25$	1	0	0	0	1	0	1	0

Для	Вес раз-	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1
	ряда										
$p=2$	$N=25$	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Характерная особенность кодовых представлений, приведенных в табл. 3.3, состоит в том, что в первом из них после каждой единицы слева направо следует не менее одного нуля, а во втором — не менее двух нулей.

Из единственности представления натурального числа N в виде (3.4), (3.5) вытекает единственность минимальной формы этого числа в p -коде Фибоначчи.

Заметим, что при $p = 1$ понятия минимальной и свернутой формы p -кода

Фибоначчи совпадают. Отсюда, в частности, следует, что при $p = 1$ приведение кода к минимальной форме сводится к операции свертки кода.

В табл. 3.4, 3.5 приведены минимальные n -разрядные формы начального отрезка натуральных чисел в p -коде Фибоначчи при $p = 1$ и $p = 2$:

Таблица 3.4

$N \backslash \varphi_1(l)$	5	3	2	1	1	$N \backslash \varphi_1(l)$	5	3	2	1	1
0	0	0	0	0	0	4	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	5	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	6	1	0	0	1	0
3	0	1	0	0	0	7	1	0	1	0	0

Таблица 3.5

$N \backslash \varphi_2(l)$	6	4	3	2	1	1	1	$N \backslash \varphi_2(l)$	6	4	3	2	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	6	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	7	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	8	1	0	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0								

Анализ табл. 3.4, 3.5 показывает, что в минимальной форме с помощью 5-разрядного 1-кода Фибоначчи можно представить 8 натуральных чисел от 0 до 7 включительно, причем 8 есть 1-число Фибоначчи с номером 5, т. е. $\varphi_1(5) = 8$, а с помощью 7-разрядного 2-кода Фибоначчи можно представить 9 натуральных чисел от 0 до 8 включительно, причем 9 есть 2-число Фибоначчи с номером 7, т. е. $\varphi_2(7) = 9$. Результат проведенного анализа есть частный случай следующей теоремы, которая приводится без доказательства.

Теорема 3.3. При заданных $p \geq 0$ и $n \geq p$ с помощью n -разрядного p -кода Фибоначчи в минимальной форме можно представить $\varphi_p(n)$ натуральных чисел от 0 до $\varphi_p(n) - 1$ включительно, где $\varphi_p(n)$ — n -е p -число Фибоначчи.

2. Обозначим через $M(n)$ – множество натуральных чисел, минимальные формы которых в p -коде Фибоначчи содержат 1 в n -м разряде и 0 во всех разрядах, старших чем n . Из теоремы 3.2 вытекает, что в это множество входят все натуральные числа, удовлетворяющие условиям (3.4), (3.5).

Сравним числа из множеств $M(n)$ и $M(n-1)$. Из (3.4), (3.5) вытекает, что любое число из множества $M(n)$ строго больше любого числа из множества $M(n-1)$. Это действительно так, если учесть, что минимальное число из множества $M(n)$ равно $\varphi_p(n)$, а максимальное число из множества $M(n-1)$ равно $\varphi_p(n-1) + \varphi_p(n-p-1) - 1 = \varphi_p(n) - 1$, что непосредственно вытекает из (3.4), (3.5).

Из проведенных рассуждений вытекает простое правило сравнения натуральных чисел, представленных в минимальной форме p -кода Фибоначчи. Сравнение осуществляется поразрядно, начиная со старших разрядов. Если кодовые изображения чисел совпадают, то числа равны между собой; если не совпадают, то большим считают число, содержащее единицу в старшем из несовпадающих разрядов.

Таким образом, сравнение чисел в p -кодах Фибоначчи осуществляется так же просто, как это делается в классической двоичной системе счисления ($p=0$), что следует считать одним из принципиальных достоинств p -кодов Фибоначчи.

3. Теоремы 3.1, 3.3 позволяют определить избыточность p -кода Фибоначчи ($p>0$) по сравнению с классическим двоичным кодом ($p=0$).

Под относительной избыточностью нумерации обычно понимается величина

$$R = (n - m)/m = n/m - 1,$$

где n и m – соответственно число разрядов избыточного и неизбыточного кода для представления одного и того же диапазона чисел.

При таком определении избыточности она характеризует относительное удлинение разрядной сетки избыточного кода по сравнению с неизбыточным.

С помощью n -разрядного p -кода Фибоначчи можно представить либо $\varphi_p(n+p)$ натуральных чисел, если не накладывать ограничений на форму представления (теорема 3.1), либо $\varphi_p(n)$ чисел, если числа представлять в минимальной форме. Для представления этих же диапазонов чисел в неизбыточной нумерации соответственно потребуется либо $m_1 \approx \log_2 \varphi_p(n+p)$, либо $m_2 \approx \log_2 \varphi_p(n)$ разрядов.

При этом в первом случае избыточность p -кода Фибоначчи равна:

$$R_1 = n/\log_2 \varphi_p(n+p) - 1, \quad (3.7)$$

во втором

$$R_2 = n/\log_2 \varphi_p(n) - 1. \quad (3.8)$$

В табл. 3.6 приведены значения избыточности p -кода Фибоначчи R_1 и R_2 , вычисленные по формулам (3.7), (3.8), и соответствующие им диапазоны представления чисел D_1 и D_2 при заданной длине разрядной сетки $n = 20$ для различных p -кодов Фибоначчи ($p = 0, 1, 2, 3, 4$).

Т а б л и ц а 3.6

p	0	1	2	3	4
R_1	0	0,417	0,751	1,036	1,285
D_1	2^{20}	17 711	2745	907	431
R_2	0	0,491	0,938	1,37	1,8
D_2	2^{20}	10 946	1278	345	140

При достаточно больших n p -числа Фибоначчи $\varphi_p(n+p)$ и $\varphi_p(n)$ в формулах (3.7), (3.8) можно заменить их приближенными выражениями в соответствии с формулой (1.56). В этом случае получим следующие выражения для R_1 и R_2 :

$$R_1 \approx n / [(n+p+1) \cdot \log_2 \alpha_p - \log_2 k_p] - 1; \quad (3.9)$$

$$R_1 \approx n / [(n+1) \cdot \log_2 \alpha_p - \log_2 k_p] - 1. \quad (3.10)$$

Пределы выражений (3.9), (3.10) при $n \rightarrow \infty$ совпадают и равны:

$$R = 1 / \log_2 \alpha_p - 1. \quad (3.11)$$

Предельные значения избыточности p -кода Фибоначчи, вычисленные на основании выражения (3.11), для различных p приведены ниже

p	0	1	2	3	4	5	6
R	0	0,44	0,81	1,15	1,46	1,76	2,05

Отсюда вытекает, что с увеличением p избыточность p -кода Фибоначчи существенно возрастает; поэтому практическое значение имеют p -коды Фибоначчи, соответствующие начальным значениям p . Выражение (3.1), задающее все множество p -кодов Фибоначчи, представляет прежде всего теоретический интерес, как весьма широкое обобщение классического двоичного кода (3.2). В дальнейшем при рассмотрении приложений p -кодов Фибоначчи в цифровой технике основное внимание будет уделено простейшему избыточному p -коду Фибоначчи, соответствующему $p = 1$.

3.3. СЛОЖЕНИЕ

1. Так как понятие p -кода Фибоначчи является обобщением понятия классического двоичного кода ($p = 0$), то в дальнейшем при выводе правил выполнения арифметических операций в p -коде Фибоначчи будем пользоваться следующим приемом. Сначала детально анализируется соответствующее правило в классической двоичной арифметике, а затем "выводится" аналогичное правило для p -кодов Фибоначчи, с учетом свойств p -чисел Фибоначчи.

Начнем с анализа правил сложения чисел в классическом двоичном коде. Как известно, в основе двоичного сложения лежит следующая таблица сложения двоичных разрядов:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, \\ 0 + 1 &= 1, \\ 1 + 0 &= 1, \\ 1 + 1 &= 10. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Последняя строка этой таблицы задает правило переноса единицы в старшие разряды и отображает следующее теоретико-числовое тождество для двоичных чисел:

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}, \tag{3.13}$$

где 2^n и 2^{n+1} — соответственно веса n -го и $(n + 1)$ -го разрядов двоичного кода (3.2).

Очевидно, что "вывод" правила сложения двоичных разрядов в p -коде Фибоначчи необходимо начинать с анализа выражения

$$\varphi_p(n) + \varphi_p(n), \tag{3.14}$$

где $\varphi_p(n)$ — вес n -го разряда в p -коде Фибоначчи.

Пусть $p = 1$; в этом случае для суммы (3.14) можно записать следующие формулы [см. (1.27)]:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi_1(n) + \varphi_1(n) &= \varphi_1(n) + \varphi_1(n-1) + \varphi_1(n-2); \\ \text{б) } \varphi_1(n) + \varphi_1(n) &= \varphi_1(n+1) + \varphi_1(n-2). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Равенствам (3.15) соответствует следующая таблица сложения n -х разрядов кода Фибоначчи:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, \\ 0 + 1 &= 1, \\ 1 + 0 &= 1; \\ \text{а) } 1 + 1 &= 1 \ 1 \ 1, \\ \text{б) } 1 + 1 &= 1 \ 0 \ 0 \ 1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Анализ этой таблицы позволяет сформулировать следующие особенности сложения двоичных разрядов в коде Фибоначчи ($p = 1$):

1. При сложении единиц в n -х разрядах возникает перенос единицы не в один разряд (как это имеет место в классической двоичной системе счисления), а в два разряда одновременно.

2. Существует два способа сложения. В способе а) при сложении единичных n -х разрядов в n -м разряде промежуточной суммы записывается единица и возникает перенос единицы в два младших разряда — $(n - 1)$ -й и $(n - 2)$ -й. Работа одноразрядного полусумматора в этом случае описывается системой логических уравнений:

$$\begin{aligned} s_n &= a_n \vee b_n; \\ d_n &= a_n \wedge b_n, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где a_n, b_n — значения n -х разрядов слагаемых; s_n, d_n — соответственно значения n -го разряда промежуточной суммы и переноса из n -го разряда.

В способе б) в n -й разряд промежуточной суммы записывается 0 и возникает перенос единицы в $(n + 1)$ -й и $(n - 2)$ -й разряды одновременно. Работа одноразрядного полусумматора в этом случае описывается системой логических уравнений:

$$\begin{aligned} s_n &= (a_n \wedge \bar{b}_n) \vee (\bar{a}_n \wedge b_n); \\ d_n &= a_n \wedge b_n. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В общем случае (любое p) в основу таблицы сложения двоичных разрядов в p -коде Фибоначчи могут быть положены следующие тождества:

$$\begin{aligned} \varphi_p(n) + \varphi_p(n) &= \varphi_p(n) + \varphi_p(n - 1) + \varphi_p(n - p - 1); \\ \varphi_p(n) + \varphi_p(n) &= \varphi_p(n) + \varphi_p(n - p) + \varphi_p(n - p - 1) + \dots + \varphi_p(n - 2p); \\ \varphi_p(n) + \varphi_p(n) &= \varphi_p(n + 1) + \varphi_p(n - p - 1) + \varphi_p(n - p - 2) + \dots + \varphi_p(n - 2p). \end{aligned}$$

Читателю предоставляется право самостоятельно вывести соответствующие правила сложения в p -коде Фибоначчи для случая $p > 1$.

При сложении с помощью таблиц слагаемые числа должны быть представлены в минимальной форме.

Простейший способ сложения состоит в последовательном образовании промежуточных сумм S_j и переносов D_j в соответствии с (3.16) до момента получения нулевого переноса; при этом перед каждым таким этапом промежуточная сумма приводится к минимальной форме.

С точки зрения ускорения процесса сложения важное значение имеет следующая особенность образования промежуточной суммы, вытекающая из свойства минимальной формы. Пусть при сложении двух минимальных форм p -кода Фибоначчи в i -х разрядах слагаемых содержатся единицы. Тогда из свойства минимальной формы вытекает, что разряды слева и справа от i -х единичных должны быть заведомо нулевыми, т. е.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & i+2 & i+1 & i & i-1 & i-2 & \text{— номер разряда,} \\
 A = \dots & a_{i+2} & 0 & 1 & 0 & a_{i-2} & \\
 B = & b_{i+2} & 0 & 1 & 0 & b_{i-2} &
 \end{array}$$

Так как результат сложения $(i+1)$ -х и $(i-1)$ -х разрядов в этом случае является заведомо нулевым, то единичный перенос, возникающий в один из соседних разрядов, а именно — в $(i-1)$ -й разряд при сложении по способу а) и в $(i+1)$ -й разряд при сложении по способу б), должен быть сразу же помещен в соответствующий разряд промежуточной суммы.

Пример 3.3. Произвести сложение чисел 31 и 22 в коде Фибоначчи:

1. Сложение по способу а):

1) образование промежуточной суммы S_1 и переноса D_1 :

$$\begin{array}{r}
 31 = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
 22 = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
 \downarrow \quad \rightarrow 1
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{— промежуточная сумма } S_1 \\
 \text{— перенос } D_1;
 \end{array}$$

2) свертка S_1

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \uparrow & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \uparrow & \quad & \quad \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{array} \right.$$

3) сложение S_1 с переносом D_1

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
 \quad \quad \quad \downarrow \quad \rightarrow 1
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{— промежуточная сумма } S_2 \\
 \text{— перенос } D_2;
 \end{array}$$

4) свертка S_2 :

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \uparrow & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{array} \right.$$

5) сложение S_2 с переносом D_2 :

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
 \quad \quad \quad \downarrow \quad \rightarrow 1
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{— промежуточная сумма } S_3 \\
 \text{— перенос } D_3;
 \end{array}$$

6) свертка S_3 :

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \uparrow & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array} \right.$$

7) сложение S_3 с переносом D_3 :

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 + \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0
 \end{array}
 \quad \text{— промежуточная сумма } S_4.$$

Так как при этом возникает нулевой перенос, то на этом сложение закончено.

Результат сложения:

$$32 + 22 = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0.$$

2. Сложение по способу б):

1) образование S_1 и D_1

$$31 = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$$

$$22 = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \uparrow & & & \rightarrow & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \end{array} \begin{array}{l} - S_1 \\ - D_1; \end{array}$$

2) свертка S_1

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0; \end{array} \right.$$

3) сложение S_1 и D_1

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ + & & & & & 1 & & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \uparrow & & & \rightarrow & & & \\ & & 1 & & & & & & \end{array} \begin{array}{l} - S_2 \\ - D_2; \end{array}$$

4) свертка S_2 . В данном случае S_2 уже представлено в минимальной форме.

5) сложение S_2 и D_2 :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ + & & & & & 1 & & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \uparrow & & & \rightarrow & & & \\ & & 1 & & & & & & \end{array} \begin{array}{l} - S_3 \\ - D_3; \end{array}$$

6) свертка S_3 не производится, так как сумма S_3 представлена в минимальной форме;

7) сложение S_3 и D_3 :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & \end{array} - S_4$$

Результат сложения:

$$31 + 22 = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0.$$

2. Как уже упоминалось, при $p > 0$ качественно новым свойством p -кодов Фибоначчи по сравнению с классическим двоичным кодом ($p = 0$) является свойство множественности представления одного и того же числа. Из этого свойства вытекает следующий оригинальный алгоритм сложения чисел в коде Фибоначчи, который не имеет аналога в классической двоичной системе счисления.

Существо этого способа продемонстрируем при сложении чисел A и B из примера 3.3:

Номер разряда	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Вес разряда	34	21	13	8	5	3	2	1	1
$A = 31$	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$B = 22$	0	1	0	0	0	0	0	1	0

Сопоставляя одноименные разряды кодов слагаемых, замечаем, что единицы в 5-м и 2-м разрядах кода числа 31 могут быть переписаны в соответствующие разряды кода числа 22 (такой процесс переписывания единиц будем называть "поглощением" единиц). В результате "поглощения" единиц исходные коды преобразуются в новые коды, первый из которых будем называть кодом остатка сложения R_1 , а второй – кодом промежуточной суммы S_1 :

Номер разряда	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Вес разряда	34	21	13	8	5	3	2	1	1
R_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
S_1	0	1	0	1	0	0	1	1	0

После этого над кодом R_1 выполняется операция развертки кода, а над кодом S_1 – операция свертки:

$$R_1 = \begin{cases} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ & \downarrow & \downarrow & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ & & \downarrow & \downarrow & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0, \\ & & & \downarrow & \downarrow & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0, \\ & & & & \downarrow & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1; \end{cases}$$

$$S_1 = \begin{cases} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0, \\ & & & \downarrow & \downarrow & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0. \end{cases}$$

На следующем шаге осуществляется сопоставление кодов R_1 и S_1

$$R_1 = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1,$$

$$S_1 = 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

и выполняется операция "поглощения" единиц, в результате чего образуются коды второго остатка сложения R_2 и второй промежуточной суммы S_2 :

$$R_2 = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,$$

$$S_2 = 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1.$$

Так как код второго остатка R_2 изображает число 0, то на этом сложение закончено. После приведения последней промежуточной суммы S_2 к минимальной форме получаем результат сложения:

$$S = S_2 = \begin{cases} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1, \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0, \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0, \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0. \end{cases}$$

3.4. ВЫЧИТАНИЕ

1. Как известно, способ непосредственного вычитания чисел в классической двоичной системе счисления ($p = 0$) основан на заеме единицы из старшего разряда кода вычитаемого на основе следующего равенства:

$$2^{n+k} - 2^n = 2^{n+k-1} + 2^{n+k-2} + \dots + 2^n.$$

При этом таблица вычитания в классической двоичной арифметике имеет вид

$$0 - 0 = 0.$$

$$1 - 1 = 0,$$

$$1 - 0 = 1.$$

$$10 - 1 = 1,$$

$$110 - 1 = 11.$$

$$1000 - 1 = 111.$$

В основе таблицы вычитания в коде Фибоначчи ($p = 1$) лежат следующие равенства:

$$\varphi(n+k) - \varphi(n) = \varphi(n+k-2) + \varphi(n+k-3) + \dots + \varphi(n-1);$$

$$\varphi(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-2),$$

откуда вытекает следующая таблица вычитания:

$$\begin{aligned} 0 - 0 &= 0, \\ 1 - 1 &= 0, \\ 1 - 0 &= 0 \ 1 \ 1, \\ 10 - 1 &= 0 \ 1, \\ 100 - 1 &= 1 \ 1, \\ 1000 - 1 &= 1 \ 1 \ 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Читателю предоставляется возможность самостоятельно "вывести" правила непосредственного вычитания чисел в p -кодах Фибоначчи, соответствующих значениям $p > 1$.

Вычитание многоразрядных кодов Фибоначчи осуществляется следующим образом. Вначале осуществляется сравнение кодов Фибоначчи с целью определения большего числа и затем в соответствии с (3.19) осуществляется непосредственное вычитание.

В качестве примера рассмотрим процесс вычитания в коде Фибоначчи числа 25 из числа 98:

Номер разряда	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Вес разряда	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1
$A = 98$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$B = 25$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
R	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	

Ситуации в вычитаемых кодах, которые приводят к заему единиц в соответствии с (3.19), в указанном примере выделены.

После приведения полученного кода R к минимальной форме получим результат вычитания:

$$R = \begin{cases} 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0, \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0. \end{cases}$$

2. Непосредственное вычитание чисел в коде Фибоначчи может быть осуществлено также другим способом, который основан на свойстве множественности представления чисел в кодах Фибоначчи. Существо этого способа рассмотрим на примере вычитания числа 25 из числа 98.

Как и в предыдущем способе, вначале коды чисел сравниваются между собой с целью определения большего числа и затем из большего числа вычитается меньшее в следующем порядке. На первом шаге вычитания происходит сопоставление кодов исходных чисел $A = 98$ и $B = 25$:

Номер разряда	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Вес разряда	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1
$A = 98$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$B = 25$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0

При этом происходит взаимное "уничтожение" единиц во всех одноименных разрядах кодов с единичными значениями (в рассматриваемом примере "уничтожение" единиц происходит в 1-м разряде кодов A и B). В результате таких действий образуются две новые промежуточные кодовые комбинации:

$$A_1 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \boxed{0} \ 0,$$

$$B_1 = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \boxed{0} \ 0.$$



"уничтожение" единиц

После этого в коде большего числа A_1 последовательно выполняются операции развертки двоичных разрядов и после каждого шага развертки происходит сопоставление сравниваемых кодов и взаимное "уничтожение" единиц:

1) развертка двоичных разрядов в A_1

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{l} \underline{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0} \ 0 \ 0, \\ \underline{0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0} \ 0; \end{array} \right.$$

2) сопоставление A_1 и B_1 :

$$A_1 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0,$$

$$B_1 = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0;$$

3) "уничтожение" единиц и образование новых промежуточных кодов:

$$A_2 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \boxed{0} \ 0 \ 0 \ 0,$$

$$B_2 = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \boxed{0} \ 0 \ 0 \ 0;$$

4) развертка двоичных разрядов в A_2 :

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{l} \underline{0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0} \ 0, \\ \underline{0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0} \ 0; \end{array} \right.$$

5) сопоставление A_2 и B_2 :

$$A_2 = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0,$$

$$B_2 = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0;$$

6) "уничтожение" единиц и образование новых промежуточных кодов:

$$A_3 = 0 \ 1 \ \boxed{0} \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0,$$

$$B_3 = 0 \ 0 \ \boxed{0} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.$$

На этом вычитание закончено, так как в промежуточном коде B_3 все единицы "уничтожены".

После приведения кода A_3 к минимальной форме получаем результат вычитания:

$$R = \begin{cases} 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0, \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0. \end{cases}$$

3. Принципиальным недостатком рассмотренных способов непосредственного вычитания в прямых кодах является то, что перед вычитанием необходимо осуществлять сравнение чисел по величине, на что требуется дополнительное время при выполнении арифметических операций. В классической двоичной арифметике ($p = 0$) от этого недостатка избавляются путем кодирования отрицательных чисел в обратном или дополнительном кодах, что позволяет заменить вычитание чисел сложением.

Новым качественным свойством "фибоначчиевых" систем счисления является возможность непосредственного вычитания чисел в прямых кодах без предварительного сравнения их по величине. Существо такого способа непосредственного вычитания состоит в следующем:

1. Сопоставить исходные коды (например, $A = 98$ и $B = 25$) и произвести взаимное "уничтожение" единиц, в результате чего образуется первая группа промежуточных кодов:

$$A_1 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,$$

$$B_1 = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0.$$

2. Выполнить развертку каждого из промежуточных кодов:

$$A_1 = \begin{cases} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1; \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1. \end{cases}$$

$$B_3 = \begin{cases} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ & & & & & & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1; \end{cases}$$

4) сопоставление A_3 и B_3 и образование новых промежуточных кодов:

$$\begin{aligned} A_3 &= 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & \boxed{1}, \\ B_3 &= 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1}; \end{aligned}$$

|
"уничтожение" единиц

$$\begin{aligned} A_4 &= 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0, \\ B_4 &= 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{aligned}$$

На этом вычитание закончено, так как в коде B_4 все единицы "уничтожены". После приведения кода A_4 к минимальной форме получаем результат вычитания:

$$R = \begin{cases} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0, \\ & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0. \end{cases}$$

4. С помощью несложных преобразований кодов сложение в коде Фибоначчи может быть сведено к вычитанию.

Указанное преобразование кодов основывается на следующем равенстве:

$$\varphi(n) + \varphi(n) = \varphi(n+1) + \varphi(n) - \varphi(n-1),$$

которому соответствует еще одна таблица сложения двоичных разрядов в коде Фибоначчи:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, \\ 0 + 1 &= 1, \\ 1 + 0 &= 1, \\ 1 + 1 &= 1 \quad 1(-1). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Из (3.20) вытекает, что при сложении единиц в n -м разряде возникает перенос в два разряда — $(n+1)$ -й и $(n-1)$ -й, причем в $(n+1)$ -й разряд — положительный перенос $(+1)$, а в $(n-1)$ -й — отрицательный (-1) .

Так как коды Фибоначчи слагаемых представлены в минимальной форме, то положительный перенос из n -го в $(n+1)$ -й разряд сразу же помещается в $(n+1)$ -й разряд промежуточной суммы, а отрицательный перенос из n -го в $(n-1)$ -й разряд запоминается. Возникающую при этом совокупность отрицательных переносов можно также рассматривать как код Фибоначчи некоторого отрицательного числа. Поэтому способ образования промежуточной суммы и отрицательных переносов в соответствии с (3.20) можно рассматривать как простой в логическом отношении способ сведения сложения чисел к вычитанию.

В качестве примера рассмотрим сложение следующих чисел в коде Фибоначчи ($p = 1$):

Номер разряда	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Вес разряда	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1
$A = 82$	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$B = 86$	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0

Сложение сводится к вычитанию, если осуществить следующее преобразование кодов в соответствии с нашей таблицей:

$$\begin{array}{r}
 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0, \\
 A_1 = 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0, \\
 B_1 = 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0.
 \end{array}$$

В дальнейшем вычитание числа B_1 из числа A_1 может быть осуществлено любым из рассмотренных выше способов.

В заключение этого параграфа еще раз подчеркнем, что качественно новым свойством "фибоначчиевой" арифметики является существование в ней "простого" в алгоритмическом отношении способа непосредственного вычитания чисел в прямых кодах, не требующего предварительного сравнения чисел по величине. Это позволяет отказаться от применения в "фибоначчиевой" арифметике понятий обратного и дополнительного кодов и все арифметические операции выполнять в прямых кодах.

3.5. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ

1. При разработке правил выполнения простейших арифметических операций в кодах Фибоначчи (сложения и вычитания) мы в каждом случае тщательно анализировали аналогичное правило в двоичной системе счисления ($p = 0$) и затем уже обобщали его для случая p -кодов Фибоначчи.

При создании правил умножения и деления чисел в коде Фибоначчи воспользуемся приемами умножения и деления целых чисел, которые широко применялись в вычислительной технике Древнего Египта [34].

В основе этих приемов лежит операция удвоения, играющая важную роль в арифметике древних египтян.

Пусть, например, требовалось умножить число 305 на 41. В этом случае поступали следующим образом. Составлялась таблица из двух столбцов. В ле-

вом столбце таблицы помещались двоичные числа 2^k ($k = 0, 1, 2, \dots$), а в правом столбце первое число являлось одним из сомножителей, а каждое последующее равнялось удвоенному предыдущему.

/1	305	\Rightarrow	305
2	610		
4	1220		
/8	2440	\Rightarrow	2440
16	4880		
/32	9760	\Rightarrow	9760

$$41 \times 305 = 12\,505.$$

Затем наклонной черточкой отмечались те двоичные числа левого столбца, сумма которых равна другому сомножителю ($32 + 8 + 1 = 41$). Результат умножения получался путем сложения чисел второго столбца, соответствующих отмеченным черточками числам левого столбца.

Применяемое здесь разложение целого числа по степеням двойки дает представление данного числа в классической двоичной системе счисления ($p = 0$); если слева от чисел, не помеченных черточками, поставить нули, а черточки считать единицами, то, записав подряд все пометки, начиная с нижней, получим двоичный код числа 41:

$$41 = 1\,0\,1\,0\,0\,1.$$

Существенно подчеркнуть, что при представлении числа 305 в двоичной системе счисления его удвоение осуществляется путем сдвига кода числа 305 на один разряд влево: отсюда вытекает, что изложенный выше древнеегипетский способ умножения по существу совпадает с основным алгоритмом умножения чисел в современной вычислительной технике, который сводится к сдвигу и сложению.

Операция удвоения является основной и при делении целых чисел. Если, например, требовалось разделить число 481 на число 13, то египетский вычислитель действовал следующим образом. Вначале составлялась таблица из двух столбцов, в первом из которых помещались двоичные числа 2^k ($k = 0, 1, 2, \dots$), а во втором столбце первое число являлось делителем 13, а каждое последующее равнялось удвоенному предыдущему:

/1	$13 < 481$	$13 < 65$	$13 = 13$
2	$26 < 481$	$26 < 65$	$26 > 13$
/4	$52 < 481$	$52 < 65$	
8	$104 < 481$	$104 > 65$	
16	$208 < 481$		
/32	$416 < 481$		
64	$832 > 481$		

На каждом шаге удвоения числа второго столбца сравнивались с делимым 481 и это происходило до тех пор, пока очередное удвоение не приводило к получению числа (в данном случае 832), большего, чем делитель. После этого из делимого вычиталось число второго столбца, предшествующее числу 832, т. е. $481 - 416 = 65$, и отмечалось черточкой двоичное число 32 первого столбца, соответствующее числу 416. После этого с разностью 65 проделывалась та же процедура; при этом отмечалось двоичное число 4 и образовывалась новая разность $65 - 52 = 13$, с которой опять проделывалась та же процедура. Сумма двоичных чисел, отмечаемых черточками ($32 + 4 + 1 = 37$), и являлась искомым результатом.

2. Анализ древнеегипетского способа умножения и деления целых чисел позволяет предложить следующий способ умножения в p -кодах Фибоначчи.

Для умножения числа 305 на 41 в 1-коде Фибоначчи составляется таблица из двух столбцов:

1	305		
1	305		
/2	610	⇒	610
3	915		
/5	1525	⇒	1525
8	2440		
/13	3965		
21	6405		
/34	20 370	⇒	10 370

$$41 \times 305 = 12\,505.$$

В левом столбце помещается ряд Фибоначчи ($p = 1$), где черточками отмечаются числа Фибоначчи, в сумме составляющие первый сомножитель ($34 + 5 + 2 = 41$); во втором столбце первые два числа равны второму сомножителю 305, а каждое последующее равно сумме двух предыдущих.

Результат умножения образуется путем сложения чисел правого столбца, соответствующих отмеченным черточками числам левого столбца.

Ниже умножение этих же чисел выполнено в 2-коде Фибоначчи:

1	305
1	305
1	305
2	610
3	915
4	1220
6	1830
9	2745

13	3965	
19	5795	
28	8540	
/41	12 505	\Rightarrow 12 505

$$41 \times 35 = 12\,505.$$

3. Способ деления чисел в p -коде Фибоначчи также восходит к египетскому способу деления путем удвоения.

Для пояснения сущности способа разделим число 481 на число 13 в 1-коде Фибоначчи:

1	13 < 481	13 < 39
1	13 < 481	13 < 39
2	26 < 481	26 < 39
/3	39 < 481	39 = 39
5	65 < 481	65 > 39
8	104 < 481	
13	169 < 481	
21	273 < 481	
/34	342 < 481	
55	615 > 481	

Искомый результат равен сумме чисел Фибоначчи (34 + 3 = 37), отмеченных черточками.

Г л а в а 4

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

4.1. ПОНЯТИЕ КОДА ЗОЛОТОЙ p -ПРОПОРЦИИ

1. Как известно, способ представления действительного числа A в классической двоичной системе счисления имеет следующую измерительную интерпретацию. Рассмотрим геометрический отрезок длины 2^n , который изображает множество действительных чисел, представляемых в двоичной системе счисления (рис. 4.1). Для определения двоичных разрядов a_l числа A сформируем множество эталонных отрезков $\{2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2^0, 2^{-1}, \dots$

$2^{-2}, 2^{-3}, \dots\}$, с которыми последовательно будем сравнивать отрезок длины A . Такому способу измерения соответствует следующий способ представления числа A в двоичной системе счисления:

$$A = \sum a_l 2^l, \quad (4.1)$$

где $l = n - 1, n - 2, \dots, 0, -1, -2, \dots, -\infty$; $a_l \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра в l -м разряде кода (4.1).

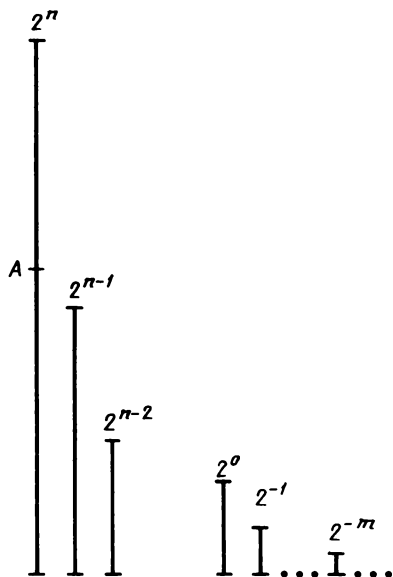


Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация двоичной системы счисления

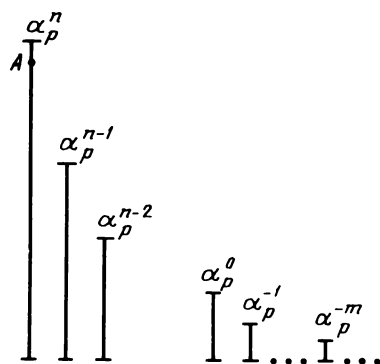


Рис. 4.2. К определению понятия кода золотой p -пропорции:
 α_p — золотая p -пропорция

Двоичный способ представления числа A допускает следующее обобщение. Рассмотрим геометрический отрезок длины α_p^n , где α_p — золотая p -пропорция, и пусть указанный отрезок изображает некоторое множество действительных чисел. Сформируем множество эталонных отрезков, длины которых образуют следующий ряд степеней золотой p -пропорции (рис. 4.2):

$$\alpha_p^{n-1}, \alpha_p^{n-2}, \dots, \alpha_p^0, \alpha_p^{-1}, \alpha_p^{-2}, \dots$$

Последовательно сравнивая отрезок длины A с эталонными отрезками, получаем следующий способ представления действительного числа A :

$$A = \sum_l a_l \alpha_p^l, \quad (4.2)$$

где $l = n-1, n-2, \dots, 0, -1, -2, \dots, -\infty$; $a_l \in \{0, 1\}$ — двоичная цифра в l -м разряде кода (4.2); α_p^l — вес l -го разряда кода (4.2).

Исследуем полученный способ представления действительных чисел. Прежде всего заметим, что выражение (4.2) задает теоретически бесконечное число способов нумерации действительных чисел, так как каждому $p \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ соответствует свой способ нумерации.

Одним из фундаментальных понятий в теории позиционных систем счисления является понятие веса l -го разряда и основания системы счисления. Как следует из выражения (4.2), вес l -го разряда кода (4.2) равен l -й степени

золотой p -пропорции. Под основанием системы счисления понимается отношение весов соседних разрядов, т. е.

$$\alpha_p^l / \alpha_p^{l-1} = \alpha_p,$$

откуда вытекает, что основанием предложенных систем нумерации является золотая p -пропорция.

При $p = 0$ золотая p -пропорция вырождается в число $\alpha_0 = 2$ и способ нумерации (4.2) вырождается в классический двоичный способ представления действительных чисел (4.1).

При $p = 1$ золотая p -пропорция α_p совпадает с классической золотой пропорцией $\alpha_1 = (1 + \sqrt{5})/2$; в этом случае способ нумерации (4.2) принимает следующий частный вид:

$$A = \sum_l a_l \alpha_1^l = \sum_l a_l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^l \quad (4.3)$$

Такой способ нумерации действительных чисел впервые был предложен Бергманом в работе [13] и назван им системой счисления с иррациональным основанием типа золотой пропорции.

При $p > 0$ все числа α_p являются иррациональными, и поэтому в общем случае выражение (4.2) порождает бесконечное число новых способов нумерации действительных чисел, которые будем называть в дальнейшем *системами счисления с иррациональными основаниями типа золотой p -пропорции* или сокращенно – *кодами золотой p -пропорции*.

При $p = \infty$ $\alpha_p = 1$, а способ нумерации (4.2) сводится к "унитарному" коду. Таким образом, системы счисления с иррациональными основаниями, задаваемые математическим выражением (4.2), как и p -коды Фибоначчи, заполняют пробел между классической двоичной системой счисления и "унитарным" кодом, включая их в качестве крайних частных случаев при $p = 0$ и $p = \infty$.

2. Сокращенная запись числа A в коде золотой p -пропорции имеет вид

$$A = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}.$$

Здесь запятая разделяет разряды кода с отрицательными и неотрицательными номерами, причем разряд с нулевым номером a_0 имеет вес $\alpha_p^0 = 1$, разряды a_1, a_2, \dots, a_{n-1} имеют соответственно веса $\alpha_p, \alpha_p^2, \dots, \alpha_p^{n-1}$, а разряды $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m}$ – веса $\alpha_p^{-1}, \alpha_p^{-2}, \dots, \alpha_p^{-m}$.

В коде золотой p -пропорции возможно представление как натуральных, так и действительных чисел. Все свойства таких представлений вытекают из фундаментального соотношения (1.18), связывающего веса разрядов в коде золотой p -пропорции. Математическое тождество (1.18) порождает свойство избыточности кода золотой p -пропорции; при $p > 0$ избыточность проявляет себя в свойстве множественности кодовых изображений чисел. Различные

кодвые изображения одного и того же числа получаются друг из друга с помощью операций свертки и развертки двоичных разрядов, которые основываются на фундаментальном соотношении (1.18) и имеют тот же смысл, что и для p -кодов Фибоначчи.

Наиболее просто в коде золотой p -пропорции изображаются числа, являющиеся степенями золотой p -пропорции. В частности, основание системы счисления α_p в любом коде золотой p -пропорции изображается традиционным образом:

$$\alpha_p = 10.$$

Другие изображения основания системы счисления получаются из исходного изображения с помощью операции развертки двоичных разрядов: например, при $p = 1$ основание α_1 имеет следующие изображения:

$$\alpha_1 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{1} \quad \text{0} \\ \text{0} \quad \text{1,} \quad \text{1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{0} \quad \text{1,} \quad \text{0} \quad \text{1} \quad \text{1} \\ \text{0} \quad \text{1,} \quad \text{0} \quad \text{1} \quad \text{0} \quad \text{1} \quad \text{1} \\ \text{0} \quad \text{1,} \quad \text{0} \quad \text{1} \quad \text{0} \quad \text{1} \quad \text{0} \quad \text{1} \quad \text{1} \end{array} \end{array} \right. \text{ и т. д.}$$

Продолжая процесс развертки младшего значащего разряда, нетрудно установить, что основание α_1 (в общем случае основание α_p) имеет бесконечное число изображений в коде золотой 1-пропорции.

Указанным изображением соответствуют следующие математические тождества, связывающие основание α_1 с другими степенями золотой 1-пропорции:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1^0 + \alpha_1^{-1} = \alpha_1^0 + \alpha_1^{-2} + \alpha_1^{-3} = \\ &= \alpha_1^0 + \alpha_1^{-2} + \alpha_1^{-4} + \alpha_1^{-5} = \\ &= \alpha_1^0 + \alpha_1^{-2} + \alpha_1^{-4} + \alpha_1^{-6} + \alpha_1^{-7} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Положительные степени золотой p -пропорции $\alpha_p^2, \alpha_p^3, \alpha_p^4, \dots, \alpha_p^k$ изображаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_p^2 &= 100, \\ \alpha_p^3 &= 1000, \\ \alpha_p^4 &= 10\,000, \\ &\dots, \\ \alpha_p^k &= \underbrace{100 \dots 00}_k. \end{aligned}$$

Отрицательные степени золотой p -пропорции изображаются так:

$$\alpha_p^{-1} = 0,1,$$

$$\alpha_p^{-2} = 0,01,$$

$$\alpha_p^{-3} = 0,001,$$

$$\alpha_p^{-k} = \underbrace{0,00 \dots 01}_{k-1}.$$

Каждая из степеней золотой p -пропорции также имеет бесконечное число изображений, которые получаются друг из друга с помощью операции развертки младшего значащего разряда. Например, при $p = 2$ число $\alpha_2^3 = 1\ 0\ 0\ 0$ имеет следующие изображения в коде золотой 2-пропорции:

$$\alpha_2^3 = \left\{ \begin{array}{l} 1\ 0\ 0\ 0 \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \qquad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0\ 1\ 0\ 0, 1\ 0\ 1 \\ \qquad \qquad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0\ 1\ 0\ 0, 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \qquad \qquad \qquad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0\ 1\ 0\ 0, 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \text{ и т. д.} \end{array} \right.$$

Указанным изображениям соответствуют следующие математические равенства:

$$\begin{aligned} \alpha_2^3 &= \alpha_2^2 + \alpha_2^0 = \alpha_2^2 + \alpha_2^{-1} + \alpha_2^{-3} = \\ &= \alpha_2^2 + \alpha_2^{-1} + \alpha_2^{-4} + \alpha_2^{-6} = \\ &= \alpha_2^2 + \alpha_2^{-1} + \alpha_2^{-4} + \alpha_2^{-7} + \alpha_2^{-9} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

4.2. ИЗОБРАЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В КОДЕ ЗОЛОТОЙ p -ПРОПОРЦИИ

1. В основу процесса "конструирования" изображений натуральных чисел в коде золотой p пропорции может быть положено правило $N + 1$. Для перехода от изображения числа N к изображению числа $N + 1$ необходимо с помощью операций свертки и развертки двоичных разрядов преобразовать исходное изображение числа N в такую форму, чтобы в разряде с нулевым номером, вес которого равен $\alpha_p^0 = 1$, была записана цифра $a_0 = 0$. Если теперь в этот разряд записать цифру $a_0 = 1$, то получим изображение числа $N + 1$ в коде золотой p -пропорции.

Число 0 изображается в коде золотой 1-пропорции (как и в любом коде золотой p -пропорции) традиционным образом:

$$0 = 0, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.$$

Для получения кодового изображения числа 1 запишем цифру 1 в разряд кода a_0 :

$$1 = 1, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.$$

Заметим, что число 1 имеет в коде золотой 1-пропорции бесконечное число изображений, которые получаются друг из друга с помощью операции развертки двоичных разрядов:

$$1 = \left\{ \begin{array}{l} 1, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 0, 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 0, 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 0, 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \quad \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 0, 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array} \right.$$

Заметим также, что указанным кодовым изображениям числа 1 соответствуют следующие математические равенства:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1^0 = \alpha_1^{-1} + \alpha_1^{-2} = \alpha_1^{-1} + \alpha_1^{-3} + \alpha_1^{-4} = \\ &= \alpha_1^{-1} + \alpha_1^{-3} + \alpha_1^{-5} + \alpha_1^{-6} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Для получения кодового изображения числа 2 запишем 1 в нулевой разряд одной из развернутых форм числа 1:

$$2 = 1, \ 1 \ 1.$$

Выполнив в изображении числа 2 свертку двоичных разрядов, получим еще одно изображение числа 2:

$$2 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \ 1, \ 1 \ 1, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \ 0, \ 0 \ 1. \end{array} \right.$$

Нижнему из этих кодовых изображений соответствует следующее математическое равенство:

$$2 = \alpha_1 + \alpha_1^{-2}.$$

Изображение числа 3 получается из изображения числа 2 следующим образом:

$$3 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 1, \ 0 \ 1, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \ 0 \ 0, \ 0 \ 1, \end{array} \right.$$

причем нижнему из этих кодовых изображений соответствует следующее математическое равенство:

$$3 = \alpha_1^2 + \alpha_1^{-2}.$$

Последовательно освобождая от единицы разряд кода с нулевым номером с помощью операций свертки и развертки двоичных разрядов, получаем представление в коде золотой 1-пропорции ряда натуральных чисел.

Число 4:

$$4 = 1 \ 0 \ 1, \ 0 \ 1$$

$$\text{или } 4 = \alpha_1^2 + \alpha_1^0 + \alpha_1^{-2}.$$

Представим число 4 в следующем виде:

$$4 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \ 1, \ 0 \ 1 \\ \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 1 \ 0 \ 1, \ 0 \ 0 \ 1 \ 1, \\ \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 1 \ 0 \ 0, \ 1 \ 1 \ 1 \ 1. \end{array} \right.$$

Записывая 1 в разряд с нулевым номером числа 4, получаем изображение числа 5:

$$5 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \ 1, \ 1 \ 1 \ 1 \ 1, \\ \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ 1 \ 1 \ 0, \ 0 \ 1 \ 1 \ 1, \\ \uparrow \uparrow \uparrow \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0, \ 1 \ 0 \ 0 \ 1, \end{array} \right.$$

$$\text{или } 5 = \alpha_1^3 + \alpha_1^{-1} + \alpha_1^{-4}.$$

Число 6 получаем из числа 5:

$$6 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \ 0 \ 1, \ 1 \ 0 \ 0 \ 1, \\ \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0, \ 0 \ 0 \ 0 \ 1, \end{array} \right.$$

$$\text{или } 6 = \alpha_1^3 + \alpha_1^7 + \alpha_1^{-4}.$$

Ниже приведены изображения в коде золотой 1-пропорции и соответствующие им математические равенства для натуральных чисел от 7 до 18:

$$7 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 = \alpha_1^4 + \alpha_1^{-4},$$

$$8 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1, \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 = \alpha_1^4 + \alpha_1^0 + \alpha_1^{-4},$$

$$9 = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0, \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 = \alpha_1^4 + \alpha_1^1 + \alpha_1^{-2} + \alpha_1^{-4},$$

$$10 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0, \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 = \alpha_1^4 + \alpha_1^2 + \alpha_1^{-2} + \alpha_1^{-4},$$

$$11 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1, \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 = \alpha_1^4 + \alpha_1^2 + \alpha_1^0 + \alpha_1^{-2} + \alpha_1^{-4},$$

$$12 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 = \alpha_1^5 + \alpha_1^{-1} + \alpha_1^{-3} + \alpha_1^{-6},$$

$$13 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 = \alpha_1^5 + \alpha_1^1 + \alpha_1^{-3} + \alpha_1^{-6},$$

$$\begin{aligned}
14 &= 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0, 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 = \alpha_1^5 + \alpha_1^2 + \alpha_1^{-3} + \alpha_1^{-6}, \\
15 &= 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1, 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 = \alpha_1^5 + \alpha_1^2 + \alpha_1^0 + \alpha_1^{-3} + \alpha_1^{-6}, \\
16 &= 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0, 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 = \alpha_1^5 + \alpha_1^3 + \alpha_1^{-1} + \alpha_1^{-6}, \\
17 &= 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0, 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 = \alpha_1^5 + \alpha_1^3 + \alpha_1^1 + \alpha_1^{-6}, \\
18 &= 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0, 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 = \alpha_1^6 + \alpha_1^{-6}.
\end{aligned}$$

Все полученные математические равенства легко доказываются с помощью табл. 1.1. Например, равенство для числа 15 доказывается путем подстановки аналитических выражений для соответствующих степеней золотой пропорции из табл. 1.1:

$$15 = (11 + 5\sqrt{5})/2 + (3 + \sqrt{5})/2 + 1 + (-4 + 2\sqrt{5})/2 + (18 - 8\sqrt{5})/2.$$

Заметим, что наиболее просто в коде золотой 1-пропорции изображаются четные числа Люка, что непосредственно вытекает из формулы (1.14). Напомним, что под рядом Люка понимается следующий числовой ряд:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...

Четными числами Люка являются числа 3, 7, 18, 47, 123, ..., которые представляются в виде суммы только двух степеней золотой 1-пропорции следующим образом:

$$\begin{aligned}
3 &= \alpha_1^2 + \alpha_1^{-2}, \\
7 &= \alpha_1^4 + \alpha_1^{-4}, \\
18 &= \alpha_1^6 + \alpha_1^{-6}, \\
47 &= \alpha_1^8 + \alpha_1^{-8}, \\
123 &= \alpha_1^{10} + \alpha_1^{-10}.
\end{aligned}$$

Выше было показано, что число 1 имеет в коде золотой 1-пропорции бесконечное число изображений. Нетрудно показать, что любое натуральное число N имеет в коде золотой 1-пропорции бесконечное число изображений. Для их получения достаточно многократно осуществлять операцию развертки младшего из значащих разрядов. Например, число 3 имеет также следующие изображения в коде золотой 1-пропорции:

$$3 = \left\{ \begin{array}{l} 1\ 0\ 0, 0\ 1 \\ \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 1\ 0\ 0, 0\ 0\ 1\ 1 \\ \quad \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 1\ 0\ 0, 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \uparrow \uparrow \uparrow \\ 1\ 0\ 0, 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{array} \right. \text{ и т.д.}$$

Зададимся $p = 2$ и найдем изображения ряда натуральных чисел в коде золотой 2-пропорции.

Число 1:

$$1 = 1, 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 = \alpha_2^0.$$

Осуществляя операции развертки двоичных разрядов в кодовых изображениях числа 1, получаем еще ряд его изображений в коде золотой 2-пропорции:

$$1 = \left\{ \begin{array}{l} 1, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0, 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0, \\ \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0, 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1. \end{array} \right.$$

Продолжая процесс развертки младшего значащего разряда, нетрудно показать, что число 1 в коде золотой 2-пропорции имеет бесконечное число изображений.

Записывая 1 в разряд с нулевым номером кодового изображения числа 1 и осуществляя операции свертки двоичных разрядов, получаем изображение числа 2:

$$2 = \left\{ \begin{array}{l} 1, 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1, \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \ 0, 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \ 0, 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1. \end{array} \right.$$

Последнему из кодовых изображений соответствует следующее математическое равенство:

$$2 = \alpha_2 + \alpha_2^{-2} + \alpha_2^{-7}.$$

Число 3:

$$3 = 1 \ 1, 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.$$

Проведем следующие преобразования полученного кодового изображения числа 3:

$$3 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 1, 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \ 0, 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1, \\ \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \ 0 \ 0, 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1, \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \ 0 \ 0, 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1, \\ \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \ 0 \ 0, 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1, \end{array} \right.$$

$$\text{или } 3 = \alpha_2^3 + \alpha_2^{-1} + \alpha_2^{-5} + \alpha_2^{-10}.$$

Число 4:

$$4 = \left\{ \begin{array}{l} 1\ 0\ 1, \ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1, \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1\ 0\ 0\ 0, \ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1, \end{array} \right.$$

или $4 = \alpha_2^3 + \alpha^{-1}_2 + \alpha^{-5}_2 + \alpha^{-10}_2$.

Число 5:

$$5 = \left\{ \begin{array}{l} 1\ 0\ 0\ 1, \ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1, \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1\ 0\ 0\ 1, \ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1, \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1\ 0\ 1\ 0, \ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0, \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0, \ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0, \end{array} \right.$$

или $5 = \alpha_2^4 + \alpha^{-3}_2 + \alpha^{-7}_2$.

Продолжая процесс построения изображений натуральных чисел в коде золотой 1- и 2-пропорции, нетрудно убедиться в том, что любое натуральное число всегда будет содержать в своем изображении в кодах золотой 1- и 2-пропорции конечное число единиц, т.е. любое натуральное число содержит в своем представлении в коде золотой 1- и 2-пропорции конечное число степеней золотой 1- и 2-пропорции.

С другой стороны, осуществляя развертку младшего значащего разряда в изображении числа N , нетрудно убедиться в том, что любое натуральное число N имеет бесконечное число изображений в кодах золотой 1- и 2-пропорции.

Легко убедиться, что это утверждение справедливо для любого кода золотой p -пропорции. Таким образом, в результате проведенных рассуждений получен интересный теоретико-числовой результат, который сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. При $p > 0$ любое натуральное число N имеет бесконечное число изображений в коде золотой p -пропорции, причем каждое такое изображение содержит конечное число единиц.

2. Методологическое значение системы счисления Бергмана (4.3) и ее обобщения, задаваемого выражением (4.2), состоит прежде всего в том, что здесь соотношение между числами рациональными и иррациональными "перевернуто с головы на ноги". Исторически первыми возникли натуральные числа, затем числа рациональные как отношения натуральных чисел и затем (после открытия несоизмеримых отрезков) числа иррациональные как пределы, к которым сходятся последовательности рациональных чисел. В классических позиционных системах счисления (десятичной, двоичной, троич-

ной и др.) в качестве первоосновы, начала исчисления выступают натуральные числа (10, 2, 3), из которых по определенным правилам конструируются все другие натуральные, а также рациональные и иррациональные числа. В системах счисления (4.2) в качестве такого начала при $p > 0$ выступает иррациональное число α_p , из которого конструируются другие действительные числа, в том числе числа рациональные и натуральные.

Отличительная особенность систем счисления с иррациональными основаниями состоит также в том, что понятия "целого" и "дробного" числа в этих системах счисления не совпадают с аналогичными понятиями в традиционных системах счисления. Например, целое (в традиционном смысле) число 4 в коде золотой 1-пропорции изображается как смешанная дробь:

$$4 = 1 \ 0 \ 1, \ 0 \ 1.$$

С другой стороны, иррациональное число

$$\alpha_1^3 = [(1 + \sqrt{5})/2]^3 = (4 + 2\sqrt{5})/2,$$

изображаемое в десятичной системе счисления в виде смешанной дроби

$$\alpha_1^3 = 4, 236,$$

в коде золотой 1-пропорции изображается как "целое" число

$$\alpha_1^3 = 1 \ 0 \ 0 \ 0.$$

Система счисления Бергмана не привлекла внимания инженеров с точки зрения практического использования, а ее автор [13] по этому поводу пишет так: "Я не знаю ни одного практического применения подобных систем, кроме как умственного упражнения и приятного времяпровождения, хотя эта система может быть пригодна для алгебраической теории чисел".

В этой книге, однако, делается попытка доказать не только теоретическое, но и практическое значение кодов золотой p -пропорции для вычислительной и измерительной техники.

4.3. СХОДСТВО И РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ p -КОДАМИ ФИБОНАЧЧИ И КОДАМИ ЗОЛОТОЙ p -ПРОПОРЦИИ

1. Коды золотой p -пропорции по своим математическим свойствам близки к p -кодам Фибоначчи. Эта близость вытекает из глубокой математической связи между p -числами Фибоначчи и золотой p -пропорцией.

Как установлено в гл. 1, отношение p -чисел Фибоначчи (т. е. отношение весов соседних разрядов в p -коде Фибоначчи) при неограниченном увеличении их номеров стремится к золотой p -пропорции α_p . Предел отношения весов соседних разрядов в p -коде Фибоначчи можно считать основанием указанного способа нумерации натуральных чисел, что позволяет с определенной степенью условности p -коды Фибоначчи отнести к классу систем счисления с иррациональными основаниями α_p .

Сходство между p -кодами Фибоначчи и кодами золотой p -пропорции состоит также в существовании одной и той же математической зависимости между весами двоичных разрядов рассматриваемых кодов, которая вытекает из фундаментальных соотношений (1.18), (1.43). Это позволяет к p -кодам Фибоначчи и кодам золотой p -пропорции применять одни и те же правила преобразования кодовых изображений, называемые сверткой и разверткой двоичных разрядов.

Как и в p -коде Фибоначчи, в коде золотой p -пропорции допускается представление действительных чисел в минимальной форме.

Существование и единственность такого представления вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4.2. При заданном целом $p \geq 0$ существует единственное представление любого действительного числа A в виде

$$A = \alpha_p^n + r, \quad (4.4)$$

где

$$0 \leq r < \alpha_p^{n-p} \quad (4.5)$$

Доказательство. Ряд степеней золотой p -пропорции — это монотонно возрастающий ряд чисел, в котором всегда можно выделить такую единственную пару чисел α_p^n и α_p^{n+1} , которые связаны с числом A неравенством:

$$\alpha_p^n \leq A < \alpha_p^{n+1}. \quad (4.6)$$

Представим число A в виде:

$$A = \alpha_p^n + r$$

В силу неравенства (4.6) и соотношения (1.18) остаток r должен удовлетворять неравенству

$$0 \leq r < \alpha_p^{n+1} - \alpha_p^n = \alpha_p^{n-p}.$$

Теорема доказана. Заметим, что при $p = 0$ теорема 4.2 сводится к известному утверждению о возможности представления любого действительного числа в виде

$$A = 2^n + r,$$

где

$$0 \leq r < 2^n.$$

Раскладывая число A и все возникающие при этом остатки r по формуле (4.4), мы получаем представление числа в виде (4.2), в котором в силу неравенства (4.5) между двумя разрядами кода, имеющими единичное значение, находится не менее p нулевых разрядов. Такое представление числа A будем называть *минимальной формой* числа A в коде золотой p -пропорции. Един-

ственность минимальной формы числа A вытекает из единственности представления числа A в виде (4.4), (4.5).

Ниже приведены 5-разрядные двоичные кодовые комбинации, удовлетворяющие признаку минимальной формы в коде золотой p -пропорции при $p = 1$ и $p = 2$:

$p = 1$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	0	1

$p = 2$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0

Пример 4.1. Найти минимальную форму числа 5,8 в коде золотой p -пропорции ($p = 1$).

Веса разрядов кода равны:

$$\alpha_1^4 = (7 + 3\sqrt{5})/2 \approx 6,854;$$

$$\alpha_1^3 = (4 + 2\sqrt{5})/2 \approx 4,236;$$

$$\alpha_1^2 = (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2,618;$$

$$\alpha_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618;$$

$$\alpha_1^0 = 1;$$

$$\alpha_1^{-1} = (-1 + \sqrt{5})/2 \approx 0,618;$$

$$\alpha_1^{-2} = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0,382;$$

$$\alpha_1^{-3} = (-4 + 2\sqrt{5})/2 \approx 0,236;$$

$$\alpha_1^{-4} = (7 - 3\sqrt{5})/2 \approx 0,146.$$

Приближенные значения весов разрядов:

l	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
α_1^l	6,854	4,236	2,618	1,618	1	0,618	0,382	0,236	0,146

Для получения минимальной формы числа $A = 5,8$ выбираем отсюда те числа α_1^l и α_1^{l+1} , для которых выполняется неравенство (4.6), после чего представим число в виде (4.4):

$$A = 5,8 = \alpha_1^3 + r_1,$$

$$\text{где } \alpha_1^3 = 4,236 \text{ и } r_1 = 1,564.$$

Представление A в виде (4.4) дает значение первого значащего разряда числа A в коде золотой 1-пропорции: $a_3 = 1$.

Аналогичным образом представим теперь разность $r_1 = 1,564$:

$$r_1 = \alpha_1^0 + r_2,$$

$$\text{где } \alpha_1^0 = 1 \text{ и } r_2 = 0,564, \text{ откуда вытекает, что } a_0 = 1.$$

Далее процесс определения значений разрядов кода протекает следующим образом:

$$r_2 = \alpha_1^{-2} + r_3 = 0,382 + 0,182,$$

следовательно, $a_{-2} = 1$;

$$r_3 = \alpha_1^{-4} + r_4 = 0,146 + 0,036,$$

следовательно, $a_{-4} = 1$.

Если ограничиться принятым количеством разрядов (стр. 79), то минимальная форма числа $A = 5,8$ в коде золотой 1-пропорции будет иметь вид

$$A = 5,8 = 1 \ 0 \ 0 \ 1, \ 0 \ 1 \ 0 \ 1.$$

Заметим, что действительное значение числа $1 \ 0 \ 0 \ 1, \ 0 \ 1 \ 0 \ 1$ отличается от числа $5,8$ на величину $r_4 = 0,036$.

2. Коды золотой p -пропорции, как и p -коды Фибоначчи, относятся к разряду позиционных систем счисления. Позиционный характер рассматриваемых кодов выражается в наглядности кода, т. е. в возможности получения качественного представления о величине числа по виду его кодового изображения, а также в простоте сравнения изображаемых чисел по величине.

Обозначим через $M(n)$ множество действительных чисел, минимальные формы которых в коде золотой p -пропорции содержат 1 в n -м разряде и 0 во всех разрядах, старших чем n , и сравним действительные числа из множеств $M(n)$ и $M(n-1)$. Из теоремы 4.2 вытекает, что в множество $M(n)$ входят все действительные числа, удовлетворяющие условиям (4.4), (4.5), а в множество $M(n-1)$ — все действительные числа B , удовлетворяющие условиям:

$$B = \alpha_p^{n-1} + r, \quad (4.7)$$

где

$$0 \leq r < \alpha_p^{n-p-1}$$

Наименьшее число A_{\min} из множества $M(n)$

$$A_{\min} = \alpha_p^n = \alpha_p^{n-1} + \alpha_p^{n-p-1} \quad (4.8)$$

Из сравнения (4.7) и (4.8) вытекает, что любое число B из множества $M(n-1)$ строго меньше наименьшего числа A_{\min} из множества $M(n)$.

Из приведенных рассуждений следует простое правило сравнения действительных чисел, представленных в минимальной форме кода золотой p -пропорции. Сравнение осуществляется поразрядно, начиная со старших разрядов. Если кодовые изображения чисел совпадают, то числа равны между собой. Если кодовые изображения не совпадают, то большим является число, содержащее 1 в старшем из несовпадающих разрядов. Например, из двух кодовых изображений чисел в коде золотой 1-пропорции

1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1

↑
старшие несовпада-
ющие разряды

верхнее кодовое изображение соответствует большему числу.

Важно подчеркнуть, что простота сравнения чисел по величине является принципиальным достоинством кодов золотой p -пропорции.

3. Различие между p -кодами Фибоначчи и кодами золотой p -пропорции состоит в следующем:

1. Прежде всего заметим, что p -коды Фибоначчи предназначены для представления натуральных чисел, в то время как коды золотой p -пропорции предназначены для представления действительных чисел.

Представление натуральных чисел в p -коде Фибоначчи осуществляется "проще" и требует меньшего числа двоичных разрядов, чем в коде золотой p -пропорции. Например, число 18 в коде золотой 1-пропорции изображается следующим образом:

$$18 = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0, 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1,$$

т. е. требует для своего изображения 13 двоичных разрядов. В 1-коде Фибоначчи это же число изображается следующим образом:

$$13\ 8\ 5\ 3\ 2\ 1\ 1,$$

$$18 = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0,$$

т. е. требует для своего изображения всего лишь 7 двоичных разрядов. Поэтому во всех случаях, когда речь идет о кодировании натуральных чисел, следует отдавать предпочтение p -кодам Фибоначчи.

2. Веса разрядов кода золотой p -пропорции, в отличие от весов разрядов p -кода Фибоначчи, образуют геометрическую прогрессию. Это имеет практическое значение при реализации арифметических операций в коде золотой p -пропорции.

Важной логической операцией в классической двоичной арифметике ($p = 0$) является сдвиг кода. Как известно, эта операция имеет смысл умножения или деления на основание системы счисления (при сдвиге кода соответственно на один разряд влево или вправо). Этот же смысл имеет операция сдвига кодового изображения числа в коде золотой p -пропорции. Например, при последовательном сдвиге кода золотой 1-пропорции числа $3 = 100,01$ вправо или влево последовательно будем получать кодовые изображения следующих чисел:

а) сдвиг вправо:

$$10; 001 = 3 \cdot \alpha^{-1} = 3(\sqrt{5} - 1)/2;$$

$$1, 0001 = 3 \cdot \alpha^{-2} = 3(3 - \sqrt{5})/2;$$

$$0,10001 = 3 \cdot \alpha^{-3} = 3(2\sqrt{5} - 4)/2;$$

б) сдвиг влево:

$$1000,1 = 3 \cdot \alpha = 3(1 + \sqrt{5})/2;$$

$$10001 = 3 \cdot \alpha^2 = 3(3 + \sqrt{5})/2;$$

$$100010 = 3 \cdot \alpha^3 = 3(4 + 2\sqrt{5})/2.$$

Это свойство кодов золотой p -пропорции существенно упрощает способы умножения и деления чисел, а также обеспечивает возможность машинного представления чисел в форме "с плавающей запятой".

4.4. ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ В КОДЫ ЗОЛОТОЙ p -ПРОПОРЦИИ

1. Существует два основных способа перевода чисел из одних систем счисления в другие: табличный и аналитический (или расчетный). Первый способ основан на составлении специальных таблиц соответствия чисел в различных системах счисления. В качестве примера в табл. 4.1 приведены изображения в коде золотой 1-пропорции начального отрезка натуральных чисел.

Т а б л и ц а 4.1

N	α^4	α^3	α^2	α^1	α^0	α^{-1}	α^{-2}	α^{-3}	α^{-4}
0	0	0	0	0	0,	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1,	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0,	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0,	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1,	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0,	1	0	0	1
6	0	1	0	1	0,	0	0	0	1
7	1	0	0	0	0,	0	0	0	1
8	1	0	0	0	1,	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0,	0	1	0	1
10	1	0	1	0	0,	0	1	0	1
11	1	0	1	0	1,	0	1	0	1

Более удобным и универсальным считается аналитический способ, который широко применяется в позиционных системах счисления. Существо аналитического способа состоит в том, что путем определенных арифметических операций, выполняемых в исходной системе счисления, удается получить значения цифр кода числа в искомой системе счисления. При этом могут встретиться три случая: перевод правильных дробей; перевод неправильных дробей; перевод целых чисел.

Как известно, перевод правильных дробей из других позиционных систем

счисления в двоичную осуществляется последовательным умножением правильной дроби и промежуточных результатов на основание системы счисления. Покажем возможность применения такого способа и для систем счисления с иррациональными основаниями. Для этого рассмотрим некоторую правильную дробь A , представленную в минимальной форме кода золотой p -пропорции:

$$A = a_{-1} \alpha_p^{-1} + a_{-2} \alpha_p^{-2} + \dots + a_{-n} \alpha_p^{-n} \quad (4.9)$$

Умножив обе части выражения (4.9) на основание системы счисления α_p , получим

$$A \alpha_p = a_{-1} + a_{-2} \alpha_p^{-1} + \dots + a_{-n} \alpha_p^{-n+1}, \quad (4.10)$$

где a_{-1} — целая часть первого произведения, а

$$A_1 = a_{-2} \alpha_p^{-1} + a_{-3} \alpha_p^{-2} + \dots + a_{-n} \alpha_p^{-n+1}$$

— его дробная часть.

Таким образом, в результате первого умножения на α_p найдена первая после запятой цифра a_{-1} исходной дроби в коде золотой p -пропорции.

Умножив дробную часть A_1 произведения $A \alpha_p$ на α_p , определим вторую цифру a_{-2} кода золотой p -пропорции дроби A :

$$A_1 \alpha_p = a_{-2} + a_{-3} \alpha_p^{-1} + \dots + a_{-n} \alpha_p^{-n+2}$$

Повторяя процесс умножения n раз, получаем все n цифр исходной дроби A в коде золотой p -пропорции.

Из этих рассуждений вытекает, что перевод правильной дроби в код золотой p -пропорции осуществляется классическим образом, т. е. последовательным умножением дроби и всех возникающих при этом дробных частей промежуточных произведений на основание системы счисления α_p , причем умножение чисел осуществляется в исходной системе счисления. Код золотой p -пропорции представляет собой совокупность целых частей произведений, получающихся при последовательном умножении, причем целая часть результата первого умножения будет старшей цифрой кода золотой p -пропорции.

Продemonстрируем применение этого правила на конкретном примере.

Пример 4.2. Перевести в код золотой 1-пропорции правильную дробь $1/2$. Будем последовательно умножать эту дробь на основание системы счисления $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

Первое умножение:

$$(1/2) \cdot (1 + \sqrt{5})/2 = (1 + \sqrt{5})/4 \approx 0,809.$$

Так как целая часть полученного произведения равна 0, то $a_{-1} = 0$.

Второе умножение:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \alpha\right) \cdot \alpha = \frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{1}{2} (\alpha + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,309.$$

Так как целая часть полученного произведения равна 1, то $a_{-2} = 1$. Перед третьим умножением необходимо из числа $(3 + \sqrt{5})/4$ вычесть 1, т. е.

$$(3 + \sqrt{5})/4 - 1 = (\sqrt{5} - 1)/4 = (1/2) \alpha^{-1} \approx 0,309.$$

Третье умножение:

$$\left(\frac{1}{2} \alpha^{-1}\right) \alpha = 1/2.$$

Так как целая часть полученного произведения равна 0, то $a_{-3} = 1$.

Нетрудно убедиться, что результаты четвертого, пятого и шестого умножений полностью совпадают соответственно с результатами первого, второго и третьего умножений, т. е. $a_{-4} = 0$, $a_{-5} = 1$, $a_{-6} = 0$, откуда вытекает, что дробь $1/2$ в коде золотой 1-пропорции может быть представлена в виде периодической дроби:

$$1/2 = 0, 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0$$

2. Перейдем теперь к выводу правил перевода целых чисел и неправильных дробей в коды золотой p -пропорции.

Как известно, перевод целых чисел из других позиционных систем счисления в двоичную осуществляется последовательным делением целого числа и возникающих при этом остатков на основание системы счисления. При переводе неправильной дроби отдельно по соответствующим правилам переводят ее целую и дробную части, после чего записывают число в новой системе счисления.

Трудность применения известного правила перевода целых чисел и смешанных дробей из классических позиционных в системы счисления с иррациональными основаниями состоит в том, что, как показано выше, понятия "целого" и "дробного" числа в системах счисления с иррациональными основаниями не совпадают с аналогичными понятиями в классических позиционных системах счисления. В частности, к разряду "целых" чисел (т. е. не имеющих дробных частей) в коде золотой 1-пропорции относятся следующие числа:

$$\begin{aligned} 0 &= 0; \quad 1 = 1; \quad 10 = \alpha = (1 + \sqrt{5})/2; \\ 100 &= \alpha^2 = (3 + \sqrt{5})/2; \quad 101 = (3 + \sqrt{5})/2 + 1 = (5 + \sqrt{5})/2; \\ 1000 &= \alpha^3 = (4 + 2\sqrt{5})/2; \quad 1001 = (4 + 2\sqrt{5})/2 + 1 = (6 + 2\sqrt{5})/2; \\ 1010 &= (4 + 2\sqrt{5})/2 + (1 + \sqrt{5})/2 = (5 + 3\sqrt{5})/2, \end{aligned}$$

а к разряду смешанных дробей — все натуральные числа (за исключением числа 1).

Задача перевода целых чисел и неправильных дробей в коды золотой p -пропорции может быть сведена к задаче перевода правильных дробей, если целое число (или неправильную дробь) предварительно разделить на степень золотой p -пропорции α_p^k , большую исходного числа. Полученное таким образом число $B = A \alpha_p^{-k}$ является правильной дробью, которая переводится в код золотой p -пропорции умножением на основание системы счисления α_p .

Пусть код золотой p -пропорции полученной дроби B имеет следующий вид:

$$B = 0, b_{-1} \ b_{-2} \ \dots \ b_{-n}. \quad (4.11)$$

Для получения кода числа A из кода числа B заметим, что число A можно получить из числа B умножением на α_p^k :

$$A = B \alpha_p^k.$$

Но, как установлено выше, однократному умножению на основание системы счисления соответствует сдвиг кода золотой p -пропорции на один разряд влево; а умножение на α_p^k соответствует сдвиг кода на k разрядов влево. Отсюда вытекает, что для получения кода числа A из кода числа B необходимо запятую перенести вправо на k разрядов, т. е.

$$A = b_{-1} b_{-2} \dots b_{-k} b_{-(k+1)} \dots b_{-n}.$$

Продemonстрируем применение этого правила на следующем примере.

Пример 4.3. Перевести в код золотой 1-пропорции число 4.

Выбираем из табл. 4.1 первую из степеней золотой 1-пропорции, которая больше числа 4; этой степенью является число

$$\alpha^3 = (4 + 2\sqrt{5})/2 \approx 4,236.$$

Разделив число 4 на α^3 , получим следующую правильную дробь:

$$B = 4/\alpha^3 = 4 \alpha^{-3} = 4 \cdot 0,236 = 0,944.$$

Перевод дроби B будем производить умножением на основание системы $\alpha = 1,618$. Первое умножение:

$$B \alpha = (4 \alpha^{-3}) \alpha = 4 \alpha^{-2} \approx 1,528.$$

Так как целая часть полученного произведения равна 1, то старший разряд кода золотой 1-пропорции дроби B равен 1, т. е. $b_{-1} = 1$.

Перед вторым умножением из числа $B \alpha$ вычитаем единицу, в результате чего получим дробную часть B_2 числа B :

$$B_2 = B \alpha - 1 = 4 \alpha^{-2} - 1 \approx 0,528.$$

Второе умножение:

$$B \alpha = (4 \alpha^{-2} - 1) \alpha = 4 \alpha^{-1} - \alpha = 4 \cdot 0,618 - 1,618 = 0,854.$$

Так как целая часть полученного произведения равна 0, то $b_{-2} = 0$. Принимаем $B_3 = B_2 \alpha$.

Третье умножение:

$$B_3 \alpha = (4 \alpha^{-1} - \alpha) \alpha = 4 - \alpha^2 \approx 1,382.$$

Следовательно, $b_{-3} = 1$.

Перед четвертым умножением необходимо из числа $B_3 \alpha$ вычесть 1:

$$B_4 = B_3 \alpha - 1 = 3 - \alpha^2 = 3 - (3 + \sqrt{5})/2 = (3 - \sqrt{5})/2 = \alpha^{-2} \approx 0,382.$$

Четвертое умножение:

$$B_4 \alpha = \alpha^{-2} \alpha = \alpha^{-1} \approx 0,618.$$

Следовательно, $B_{-4} = 0$. Принимаем $B_5 = B_4 \alpha = \alpha^{-1}$.

Пятое умножение:

$$B_5 \alpha = \alpha^{-1} \alpha = 1.$$

Следовательно, $B_{-5} = 1$.

После вычитания 1 из результата пятого умножения получается число 0 и все последующие разряды кода золотой 1-пропорции числа $B = 4 \alpha^{-3}$ оказываются тождественно равными нулю. Поэтому код золотой 1-пропорции правильной дроби $B = 4 \alpha^{-3}$ имеет вид

$$B = 0, 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1. \quad (4.12)$$

Сдвигая код (4.12) на три разряда влево, что эквивалентно умножению дроби B на α^3 , получаем код золотой 1-пропорции числа 4:

$$4 = 1 \ 0 \ 1, 0 \ 1.$$

4.5. ДИАПАЗОНЫ И ФОРМЫ МАШИННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ В КОДЕ ЗОЛОТОЙ p -ПРОПОРЦИИ

1. Проведенное выше исследование способов представления чисел в коде золотой p -пропорции привело к установлению двух характерных особенностей отображения действительных чисел A на множество двоичных кодов, задаваемых математическим выражением (4.2).

С одной стороны, отображение чисел A на множество двоичных кодов многозначно, т. е. каждому числу A соответствует некоторое множество его двоичных изображений в коде золотой p -пропорции.

С другой стороны, обратное отображение однозначно, так как каждому двоичному изображению соответствует единственное число A . В множестве кодовых изображений одного и того же числа A выделяется единственное кодовое изображение, которое называется *минимальной формой*. Она обладает той характерной особенностью, что в ней между двумя единичными разрядами находится не менее p нулевых. При этом отображение множества действительных чисел на множество двоичных кодовых комбинаций, удовлетворяющих признаку минимальной формы, взаимно-однозначно, т. е. каждому числу A соответствует единственная минимальная форма и наоборот.

Зададимся числом двоичных разрядов n и исследуем вопрос о диапазоне и особенностях n -разрядного представления чисел в минимальной форме кода золотой p -пропорции.

Будем понимать под *диапазоном представления* количество чисел, которые могут быть изображены с помощью n -разрядного кода золотой p -пропорции. Очевидно, что при таком подходе диапазон определяется количеством n -разрядных двоичных комбинаций, удовлетворяющих признаку минимальной формы.

Обозначим через $F_p(n)$ количество n -разрядных минимальных форм кода золотой p -пропорции.

Пусть $n \leq p$. В этом случае признаку минимальной формы удовлетворяют следующие кодовые комбинации:

0 0 0 0 0 0,
 0 0 0 0 0 1,
 0 0 0 0 1 0,
 0 0 0 1 0 0,

0 1 0 0 0 0,
 1 0 0 0 0 0.

Число таких комбинаций равно $n + 1$, т. е.

$$F_p(n) = n + 1 \quad \text{при } n \leq p. \quad (4.13)$$

Пусть $n > p$. Разобьем множество всех n -разрядных минимальных форм на две группы. К первой группе отнесем все кодовые комбинации, начинающиеся с нуля, ко второй — начинающиеся с единицы. Отбрасывая 0 в начале кодовых комбинаций первой группы, получаем $(n - 1)$ -разрядные комбинации, удовлетворяющие признаку минимальной формы; число таких комбинаций равно $F_p(n - 1)$. Отбрасывая 1 и следующие за ней p нулей в начале кодовых комбинаций второй группы, получаем $(n - p)$ -разрядные кодовые комбинации, удовлетворяющие признаку минимальной формы; число таких комбинаций равно $F_p(n - p - 1)$.

Из этих рассуждений вытекает следующая рекуррентная формула для вычислений количества n -разрядных минимальных форм кода золотой p -пропорции при $n > p$:

$$F_p(n) = F_p(n - 1) + F_p(n - p - 1). \quad (4.14)$$

Объединяя формулы (4.13), (4.14), окончательно получаем:

$$F_p(\tilde{n}) = \begin{cases} n + 1 & \text{при } n \leq p; \\ F_p(n - 1) + F_p(n - p - 1) & \text{при } n > p. \end{cases} \quad (4.15)$$

Сравнивая числа $F_p(n)$ с p -числами Фибоначчи $\varphi_p(n)$, задаваемыми соотношением (1.43), легко установить следующую связь между ними:

$$F_p(n) = \varphi_p(n + p).$$

Из этих рассуждений вытекает, что количество чисел, которые могут быть представлены с помощью n двоичных разрядов в минимальной форме кода золотой p -пропорции, равно $(n + p)$ -му p -числу Фибоначчи $\varphi_p(n + p)$.

Полученный результат позволяет количественно определить избыточность кода золотой p -пропорции, которая совпадает с избыточностью p -кода Фибоначчи и задается выражением (3.7).

2. Исследуем теперь вопрос о шаге квантования действительных чисел при их представлении в коде золотой p -пропорции.

Для этого рассмотрим два частных случая кода золотой p -пропорции:

$$A = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0; \quad (4.16)$$

$$D = 0, d_{-1} d_{-2} \dots d_{-n}. \quad (4.17)$$

Кодовые изображения (4.16), (4.17) являются сокращенными записями следующих математических выражений:

$$A = a_{n-1} \alpha_p^{n-1} + a_{n-2} \alpha_p^{n-2} + \dots + a_0 \alpha_p^0; \quad (4.18)$$

$$D = d_{-1} \alpha_p^{-1} + d_{-2} \alpha_p^{-2} + \dots + d_{-n} \alpha_p^{-n}. \quad (4.19)$$

В кодовых изображениях (4.18), (4.19) отсутствуют соответственно дробная и целая части.

Понимая под кодовыми изображениями (4.16), (4.17) только минимальные формы кода золотой p -пропорции, введем следующее определение "целого" и "дробного" числа в коде золотой p -пропорции. Под "целым" числом в коде золотой p -пропорции будем понимать действительные числа A , минимальные формы которых в коде золотой p -пропорции не содержат дробной части, т. е. могут быть представлены в виде (4.16) или (4.18).

Под дробным числом в коде золотой p -пропорции будем понимать действительные числа D , минимальные формы которых не содержат целой части, т. е. могут быть представлены в виде (4.17) или (4.19).

При $p = 0$ выражения (4.18), (4.19) принимают вид:

$$A = a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \dots + a_0 2^0; \quad (4.20)$$

$$B = d_{-1} 2^{-1} + d_{-2} 2^{-2} + \dots + d_{-n} 2^{-n}. \quad (4.21)$$

Известно, что в классической двоичной системе счисления ($p = 0$) с помощью выражений (4.20), (4.21) можно представить 2^n чисел. При этом соседние числа отличаются друг от друга на величину шага квантования $\Delta = 1$ для выражения (4.20) или $\Delta = 2^{-n}$ — для (4.21).

Рассмотрим множество 5-разрядных минимальных форм кода золотой 1-пропорции, задаваемого выражением (4.18).

Т а б л и ц а 4.2

Веса разрядов					Действительное число A_i	Разность $\Delta_i = A_i - A_{i-1}$
α^4	α^3	α^2	α	$\alpha^0 = 1$		
0	0	0	0	0	$A_0 = 0$	—
0	0	0	0	1	$A_1 = 1$	$\Delta_1 = 1$
0	0	0	1	0	$A_2 = \alpha$	$\Delta_2 = \alpha^{-1}$
0	0	1	0	0	$A_3 = \alpha^2$	$\Delta_3 = 1$

Веса разрядов					Действительное число A_i	Разность $\Delta_i = A_i - A_{i-1}$
α^4	α^3	α^2	α	$\alpha^0 = 1$		
0	0	1	0	1	$A_4 = \alpha^2 + 1$	$\Delta_4 = 1$
0	1	0	0	0	$A_5 = \alpha^3$	$\Delta_5 = \alpha^{-1}$
0	1	0	0	1	$A_6 = \alpha^3 + 1$	$\Delta_6 = 1$
0	1	0	1	0	$A_7 = \alpha^3 + \alpha$	$\Delta_7 = \alpha^{-1}$
1	0	0	0	0	$A_8 = \alpha^4$	$\Delta_8 = 1$
1	0	0	0	1	$A_9 = \alpha^4 + 1$	$\Delta_9 = 1$
1	0	0	1	0	$A_{10} = \alpha^4 + \alpha$	$\Delta_{10} = \alpha^{-1}$
1	0	1	0	0	$A_{11} = \alpha^4 + \alpha^2$	$\Delta_{11} = 1$
1	0	1	0	1	$A_{12} = \alpha^4 + \alpha^2 + 1$	$\Delta_{12} = 1$

Из табл. 4.2 вытекает, что с помощью 5-разрядного кода золотой 1-пропорции можно представить 13 действительных чисел $A_0 \dots A_{12}$; при этом разность между соседними числами Δ_i (шаг квантования) равна либо весу младшего разряда $\alpha^0 = 1$, либо весу следующего за младшим разряда $\alpha^{-1} = 0,618$.

Рассмотрим теперь множество 5-разрядных минимальных форм кода золотой 2-пропорции, задаваемого выражением (4.18).

Т а б л и ц а 4.3

Веса разрядов						Действительное число A_i	Разность $\Delta_i = A_i - A_{i-1}$
α_2^5	α_2^4	α_2^3	α_2^2	α_2	$\alpha_2^0 = 1$		
0	0	0	0	0	0	$A_0 = 0$	—
0	0	0	0	0	1	$A_1 = 1$	$\Delta_1 = 1$
0	0	0	0	1	0	$A_2 = \alpha_2$	$\Delta_2 = \alpha_2^{-2}$
0	0	0	1	0	0	$A_3 = \alpha_2^2$	$\Delta_3 = \alpha_2^{-1}$
0	0	1	0	0	0	$A_4 = \alpha_2^3$	$\Delta_4 = 1$

Веса разрядов						Действительное число A_i	Разность $\Delta_i = A_i - A_{i-1}$
α_2^5	α_2^4	α_2^3	α_2^2	α_2	$\alpha_2^0 = 1$		
0	0	1	0	0	1	$A_5 = \alpha_2^3 + 1$	$\Delta_5 = 1$
0	1	0	0	0	0	$A_6 = \alpha_2^4$	$\Delta_6 = \alpha_2^{-2}$
0	1	0	0	0	1	$A_7 = \alpha_2^4 + 1$	$\Delta_7 = 1$
0	1	0	0	1	0	$A_8 = \alpha_2^4 + \alpha_2$	$\alpha_8 = \alpha_2^{-2}$
1	0	0	0	0	1	$A_9 = \alpha_2^5$	$\Delta_9 = \alpha_2^{-1}$
1	0	0	0	0	1	$A_{10} = \alpha_2^5 + 1$	$\Delta_{10} = 1$
1	0	0	0	1	0	$A_{11} = \alpha_2^5 + \alpha_2$	$\Delta_{11} = \alpha_2^{-2}$
1	0	0	1	0	0	$A_{12} = \alpha_2^5 + \alpha_2^2$	$\Delta_{12} = \alpha_2^{-1}$

Из табл. 4.3 вытекает, что с помощью 6-разрядного кода золотой 2-пропорции можно представить 13 действительных чисел $A_0 \dots A_{12}$. При этом разность между соседними числами Δ_i (шаг квантования) равна либо весу младшего разряда $\alpha_2^0 = 1$, либо весу разряда, следующего за младшим, т. е. α_2^{-1} , либо весу разряда, отстоящего от младшего на два разряда, т. е. α_2^{-2} .

Результаты анализа табл. 4.2, 4.3 являются частными случаями следующего более общего утверждения, доказательство которого опускается.

Теорема 4.3. При заданных целых $p \geq 0$ и $n \geq 0$ в коде золотой p -пропорции вида

$$A = \sum_{t=0}^{n-1} a_t \alpha_p^t$$

в минимальной форме можно представить $\varphi_p(n+p)$ чисел, где $\varphi_p(n+p)$ – p -число Фибоначчи с номером $(n+p)$, причем разность между соседними числами равна одному из действительных чисел α_p^{-t} , где $t \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$.

Заметим, что при $p = 0$ результат теоремы 4.3 сводится к известному утверждению о диапазоне чисел в виде (4.20), равном 2^n , и шаге квантования, равном $2^0 = 1$.

Так как числа A и D , задаваемые выражениями (4.18), (4.19), связаны следующим математическим соотношением:

$$D = A \alpha_p^{-n},$$

то результат теоремы 4.3 распространяется на представление чисел в виде

(4.19). При этом шаг квантования определяется выражением $\alpha_p^{-(n+t)}$, где $t \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$.

3. Как и в классических позиционных системах счисления, в коде золотой p -пропорции числа можно представлять как в естественной, так и в нормальной форме.

Изображение числа в естественной форме имеет вид

$$A = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$$

чему соответствует следующее математическое выражение:

$$A = a_{n-1} \alpha_p^{n-1} + a_{n-2} \alpha_p^{n-2} + \dots + a_0 \alpha_p^0 + a_{-1} \alpha_p^{-1} + a_{-2} \alpha_p^{-2} + \dots + a_{-m} \alpha_p^{-m}. \quad (4.22)$$

Если число A в выражении (4.22) умножить и разделить на некоторую целую степень основания системы счисления α_p^k , причем $k \geq n$, то число A можно также представить в виде

$$A = \alpha_p^k D, \quad (4.23)$$

где D — правильная дробь, задаваемая выражением:

$$D = d_{n-1} \alpha_p^{n-k-1} + d_{n-2} \alpha_p^{n-k-2} + \dots + d_{-m} \alpha_p^{-(m+k)}.$$

Представление числа A в виде (4.23) называется *нормальной формой* числа A в коде золотой p -пропорции. При этом показатель степени k называется *порядком*, а дробь D — *мантиссой* числа.

По аналогии с классическими позиционными системами счисления представления чисел в виде (4.22), (4.23) будем соответственно называть *представлениями* чисел в форме с фиксированной и плавающей запятой.

Из всех представлений числа в виде (4.23) выделим представление, в котором старший разряд мантиссы (т. е. первый разряд после запятой) равен единице; такое представление будем называть *нормализованным*. Все остальные представления числа в виде (4.23) будем называть *ненормализованными*.

Переход числа от естественной формы к нормальной, а также операция нормализации числа осуществляется традиционным образом, т. е. путем сдвига числа. При этом при сдвиге числа вправо на один разряд порядок числа увеличивается на единицу, при сдвиге на один разряд влево — на единицу уменьшается.

Пример 4.4. Представить в виде (4.23) код золотой 1-пропорции числа $3 = 1\ 0\ 0, 0\ 1$.

Решение:

$$3 = \alpha_1^{-3} 0, 1\ 0\ 0\ 0\ 1.$$

Введем следующие правила образования машинного кода числа:

1. Модуль мантиссы числа всегда будем представлять в минимальной форме кода золотой p -пропорции.

2. Так как порядок числа k есть целое число, то для его представления удобнее использовать p -код Фибоначчи; при этом модуль числа k будем представлять в минимальной форме p -кода Фибоначчи.

3. Кодирование знака числа и его порядка будем осуществлять традиционным образом, т. е. знак "+" будем кодировать как 0, а знак "-" как 1. С учетом введенных правил машинный код числа 3 из примера 4.4 будет иметь следующий вид:

<u>1.</u>	<u>1 0 0 0.</u>	<u>0</u>	<u>1 0 0 0 1</u>
знак порядка	код Фибоначчи порядка	знак мантиссы	мантисса

4.6. ОСОБЕННОСТИ ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ЧИСЕЛ В КОДЕ ЗОЛОТОЙ p -ПРОПОРЦИИ

1. Прежде всего отметим некоторые особенности выполнения операций свертки и развертки двоичных разрядов в коде золотой p -пропорции при ограниченной разрядной сетке.

Как известно, при $p = 1$ веса двух младших разрядов (нулевого и первого) в коде Фибоначчи равны 1; поэтому выполнение операций свертки и развертки в младших разрядах ($\underbrace{10}_{=10}$, $\underbrace{01}_{=10}$) не изменяет изображаемого кодом числа.

Пусть требуется выполнить развертку следующего кода золотой 1-пропорции:

$$0, 1 \ 0 \ 1 \ 0, \quad (4.24)$$

которое изображает число

$$A = \alpha^{-1} + \alpha^{-3} \approx 0,854.$$

Развертка кода (4.24)

$$0, 1 \ 0 \ 1 \ 0,$$

$$0, 1 \ 0 \ 0 \ 1,$$

$$0, 0 \ 1 \ 1 \ 1,$$

приводит к получению нового кода золотой 1-пропорции, изображающего другое число

$$A' = \alpha^{-2} + \alpha^{-3} + \alpha^{-1} \approx 0,764,$$

которое меньше числа A на величину веса разряда $\alpha^{-5} = 0,09$, следующего за младшим.

Если теперь выполнить свертку кода золотой 1-пропорции числа

$$B = 0,529 = 0, \quad \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 0 & 1, \\ & & \boxed{0} & & \\ & & & 1 & \end{array}$$

$$B' = 0,618 = \begin{cases} 0, & \boxed{0} & 1 & 1 & 0, \\ 0, & 1 & 0 & 0 & 0, \end{cases}$$

то после выполнения этой операции получим код золотой 1-пропорции числа $B' = 0,618$, которое больше числа B на величину веса разряда $\alpha^{-5} = 0,09$, следующего за младшим.

Таким образом, особенность выполнения свертки и развертки в младших разрядах кода золотой p -пропорции состоит в том, что при свертке младшего разряда в предыдущий возникает положительная погрешность в представлении числа, а при развертке этих же разрядов — отрицательная погрешность, причем при $p = 1$ абсолютное значение этой погрешности равно весу разряда, следующего за младшим.

2. Способы сложения и вычитания чисел в p -кодах Фибоначчи полностью применимы при сложении чисел в кодах золотой p -пропорции. При этом (в отличие от p -кодов Фибоначчи) в процессе сложения и вычитания необходимо учитывать возможность возникновения погрешностей сложения и вычитания, которые возникают при свертке и развертке младших разрядов, а также при сложении или вычитании младших разрядов, когда возникающие при этом единицы переноса (или заема) выходят за пределы разрядной сетки со стороны младших разрядов.

Как уже упоминалось, погрешности в представлении чисел, возникающие при свертке и развертке младших разрядов, равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Так как сложение по способу "поглощения" единиц и вычитание по способу "уничтожения" единиц заключается в чередовании операций свертки и развертки кодовых изображений, то происходит периодическая взаимная компенсация погрешностей и их накопления не происходит.

Сложение и вычитание с помощью таблиц включает две операции:

- 1) формирование переноса или заема единиц, в результате которого может возникнуть отрицательная погрешность в представлении числа;
- 2) приведение кода к минимальной форме (свертка кода), при которой может возникнуть положительная погрешность в представлении числа. Таким образом, в этом случае в процессе сложения (или вычитания) также происходит компенсация погрешностей.

Пример 4.5. Произвести сложение в коде золотой 1-пропорции двух правильных дробей:

$$A = 0, \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0,$$

$$B = 0, \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0.$$

Произведем сложение по методу "поглощения" единиц.

На первом этапе произведем развертку кода числа A :

$$A = 0, 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$A = \begin{cases} 0, 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1, \\ 0, 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1. \end{cases}$$

Возникающая при этом новая кодовая комбинация

$$0, 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1$$

изображает число A' , которое меньше исходного числа A на величину веса единицы α^{-8} "потерянной" в процессе развертки кода числа A , т. е.

$$A' = A - \alpha^{-8}.$$

Сопоставим коды чисел A и B и выполним операции поглощения единиц:

$$A' = 0, 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1,$$

$$B = 0, 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0,$$

$$A_1 = 0, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0,$$

$$B_1 = 0, 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1.$$

Производим свертку кода числа B_1 :

$$B_1 = \begin{cases} 0, 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1, \\ 0, 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1, \end{cases}$$

$$B'_1 = 0, 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0.$$

Заметим, что на последнем шаге свертки возникла кодовая комбинация, которая изображает число B'_1 , большее числа B_1 на величину α^{-8} (вес разряда, следующего за младшим), т. е.

$$B'_1 = B_1 + \alpha^{-8}$$

Произведем развертку кода числа A'_1 :

$$A_1 = 0, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0,$$

$$A'_1 = 0, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.$$

В результате этого получим кодовую комбинацию, которая изображает число A'_1 , которое меньше числа A_1 на величину α^{-8} , т. е.

$$A'_1 = A_1 - \alpha^{-8}.$$

Сопоставим коды чисел A'_1 и B'_1 и выполним операцию "поглощения" единиц:

$$A'_1 = 0, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1,$$

$$B'_1 = 0, 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0,$$

$$A_2 = 0, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,$$

$$B_2 = 0, 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1.$$

После приведения кода числа B_2 к минимальной форме, получим результат сложения:

$$S = \begin{cases} 0, 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1, \\ 0, 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0, \\ 0, 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{cases}$$

В процессе выполнения операций свертки и развертки трижды возникла погрешность в представлении промежуточных результатов, абсолютное значение которой на каждом шаге равнялось α^{-8} . Но знак этой погрешности в двух случаях (при развертке кода) был отрицательным, а в одном случае (при свертке кода) был положительным. Поэтому в процессе сложения произошла некоторая компенсация погрешности и окончательный результат оказался меньше истинного результата $A + B$ на величину α^{-8} , т. е.

$$S = A + B - \alpha^{-8}.$$

Пример 4.6. Произвести вычитание следующих чисел в коде золотой 1-пропорции:

$$\begin{aligned} A &= 0, 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ -B &= 0, 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0. \end{aligned}$$

Произведем вычитание по методу "уничтожения" единиц.

На первом этапе вычитания выполним одну операцию развертки двоичных разрядов в коде большего числа A :

$$A = \begin{cases} 0, 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ 0, 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0. \end{cases}$$

Сопоставим A и B и выполним взаимное "уничтожение" единиц:

$$\begin{aligned} A &= 0, 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0, \\ B &= 0, 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0, \\ A_1 &= 0, 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ B_1 &= 0, 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0. \end{aligned}$$

Опять выполняем операцию развертки разрядов в коде числа A_1 :

$$A_1 = \begin{cases} 0, 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ 0, 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1. \end{cases}$$

Сопоставляя коды чисел A_1 и B_1 и "уничтожая" единицы, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1, \\ B_1 &= 0, 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0, \\ A_2 &= 0, 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1, \\ B_2 &= 0, 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{aligned}$$

Результат вычитания совпадает с числом A_2 , т. е.

$$A_2 = A - B.$$

Заметим, что в рассмотренном примере в процессе развертки двоичных разрядов не возникало погрешности в представлении промежуточных результатов. Поэтому полученный код числа A_2 отображает истинную разность чисел $A - B$.

4.7. УМНОЖЕНИЕ

1. В основе умножения в классической двоичной системе счисления ($p = 0$) лежит следующая формула:

$$2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$$

Аналогичным свойством обладает также и золотая p -пропорция:

$$\alpha_p^n \cdot \alpha_p^m = \alpha_p^{n+m}$$

откуда вытекает, что умножение чисел в классическом двоичном коде и в коде золотой p -пропорции осуществляется по одной и той же таблице:

$$0 \cdot 0 = 0,$$

$$0 \cdot 1 = 0,$$

$$1 \cdot 0 = 0,$$

$$1 \cdot 1 = 1.$$

При этом сохраняют силу все особенности и способы умножения, справедливые для классической двоичной системы счисления, а именно: 1) умножение чисел в коде золотой p -пропорции сводится к сдвигу и сложению чисел; 2) умножение может начинаться как с младших, так и со старших разрядов множителя, и при умножении сдвигается либо множимое, либо сумма частичных произведений.

Проиллюстрируем умножение в коде золотой p -пропорции на следующих примерах.

Пример 4.7. Умножить в коде золотой 1-пропорции числа:

$$A = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0,$$

$$B = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0.$$

При выполнении умножения традиционным способом ("в столбик") умножение сводится к сложению следующих частичных произведений:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0, \end{array}$$

т. е.

$$C_1 = 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0,$$

$$C_2 = 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0,$$

$$C_3 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

Сложение C_1 и C_2 :

$$C_1 + C_2 = \left\{ \begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1. \end{array} \right.$$

Сложение $C_1 + C_2$ с C_3

$$\begin{array}{r} C_1 + C_2 = 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ C_3 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = \left\{ \begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1. \end{array} \right.$$

Для проверки правильности умножения представим числа A и B и результат их умножения в виде суммы степеней золотой 1-пропорции:

$$A = \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha,$$

$$B = \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha.$$

Тогда произведение AB можно выразить в виде

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha^6 + \alpha^3 + \alpha) (\alpha^5 + \alpha^3 + \alpha) = \\ &= \alpha^{11} + \alpha^9 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^2. \end{aligned}$$

Используя фундаментальное свойство золотой пропорции (1.18), в полученном выражении можно произвести следующие преобразования:

$$\begin{aligned} &\alpha^{11} + \underbrace{\alpha^9 + \alpha^8}_{\alpha^{10}} + \underbrace{\alpha^7 + \alpha^6}_{\alpha^8} + \underbrace{\alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^2}_{\alpha^3 + \alpha^2} = \\ &= \underbrace{\alpha^{11} + \alpha^{10}}_{\alpha^{12}} + \alpha^8 + \alpha^6 + \underbrace{\alpha^4 + \alpha^3}_{\alpha^5} + \underbrace{\alpha^2 + \alpha^2}_{\alpha + 1} = \\ &= \alpha^{12} + \alpha^8 + \underbrace{\alpha^6 + \alpha^5}_{\alpha^7} + \underbrace{\alpha^2 + \alpha}_{\alpha^3} + 1 = \\ &= \alpha^{12} + \underbrace{\alpha^8 + \alpha^7}_{\alpha^9} + \alpha^3 + 1 = \\ &= \alpha^{12} + \alpha^9 + \alpha^3 + 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A \cdot B = \alpha^{12} + \alpha^9 + \alpha^3 + 1,$$

что соответствует коду

$$A \cdot B = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1.$$

2. При машинной реализации умножения чисел из примера 4.7 умножение сводится к последовательному сложению частичных произведений с помощью накапливающего сумматора. Такой порядок выполнения действий приводит к значительным затратам времени на умножение, которое равно произведению количества ненулевых частичных произведений (равного количеству единиц в коде одного из сомножителей) на время одного сложения в коде золотой пропорции.

Свойство множественности представления чисел в коде золотой пропорции привело к разработке более быстрого способа умножения [23]. Существо такого способа состоит в одновременном формировании всех частичных произведений и их одновременном сложении с использованием операций свертки и развертки двоичных кодов. Для реализации быстрого способа умножения необходимо все ненулевые коды частичных произведений расположить в виде столбца. При наличии единицы в l -м разряде кода частичного произведения она переписывается в l -й разряд следующего за ним нижнего кода таблицы, если этот разряд содержит цифру 0, т. е. осуществляется направленные перемещение единиц из самого верхнего кода таблицы в самый нижний. По мере поступления единиц в нижний код над его разрядами выполняется операция свертки. Если перезапись единиц прекратилась, то необходимо произвести развертку предпоследнего кода, а затем продолжить процесс перемещения единиц. Свертка разрядов последнего кода и перемещение единиц выполняются до тех пор, пока все коды, кроме последнего, не будут равны нулю. При этом последний код будет представлять собой код произведения.

Пример 4.8. Умножить числа из примера 4.7, используя одновременное сложение всех частичных произведений:

$$\begin{array}{cccccccccccc} C_1 & = & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ & & & & & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C_2 & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ C_3 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

После выполнения операции перемещения единиц (указано стрелкой) получим следующую кодовую таблицу:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0. \end{array}$$

После свертки нижнего кода

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0, \end{array}$$

получим новую кодовую таблицу

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ & & & & & \downarrow & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0, \end{array}$$

в которой осуществляется перемещение единиц

```

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0,
1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0.

```

Так как в новой кодовой таблице дальнейшее перемещение единиц выполнить невозможно, то осуществляется развертка предпоследнего кода

```

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0,
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0,
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1

```

и формируется новая кодовая таблица

```

0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1,
1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0,

```

в которой осуществляется перемещение единиц

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,
1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1.

```

После свертки нижнего кода получим результат умножения в минимальной форме:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1, \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

4.8. ДЕЛЕНИЕ

1. Для вывода правила деления чисел в коде золотой пропорции проведем анализ деления в классической двоичной системе счисления ($p = 0$) Обычно правило деления двоичных чисел иллюстрируют на примере деления целых чисел, так как случай, когда делимое и делитель содержат дробные члены, сводится к делению целых чисел, если делимое и делитель умножить на одно и то же число, равное целой степени двойки (основание системы счисления).

Заметим, что деление чисел, содержащих дробные части в коде золотой пропорции, легко может быть сведено к делению "целых" чисел (т. е. не содержащих дробных членов), если делимое и делитель умножить на одно и то же число, равное целой степени золотой пропорции (основание системы счисления). Например, деление числа $9 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0, 0\ 1\ 0\ 1$, содержащего дробный член в коде золотой пропорции ($p = 1$), на число $3 = 1\ 0\ 0, 0\ 1$ может быть сведено к делению "целого" (т. е. не содержащего дробного члена) числа $9\alpha^4$ на "целое" число $3\alpha^4$. Числа $9\alpha^4$ и $3\alpha^4$ получаются из кодов исходных чисел путем сдвига запятой на четыре разряда вправо:

```

9α⁴ = 1 0 0 1 0 0 1 0 1,
3α⁴ = 1 0 0 0 1 0 0.

```

Как известно, деление двоичных чисел начинается с того, что от целого делимого слева отделяется минимально возможная группа разрядов, превышающая численно делитель или равная ему. Количество разрядов в этой группе должно либо равняться количеству разрядов в делителе, либо быть на один разряд больше. Если выделение такой группы возможно, то в старший разряд частного записывается 1, в противном случае в разряд единиц частного записывается 0.

Если выявилось, что частное содержит целую часть, то образуется новая группа вычитанием из выделенной группы делителя и приписыванием к разности очередной цифры делимого. Если в результате получилось число, превышающее делитель, то в частное записывается следующая цифра, равная 1, в противном случае — следующая цифра, равная 0.

В дальнейшем выполняется ряд одинаковых циклов. Если последняя цифра частного была равна 1, то новая группа образуется вычитанием делителя из старой группы и приписыванием очередной цифры делимого. Если последняя цифра частного была равна 0, то для образования новой группы достаточно приписать к старой группе очередную цифру делимого.

Последняя цифра целой части частного получается тогда, когда после определения очередной цифры частного (1 или 0) в делимом не останется больше цифр для того, чтобы приписывать их к разности между старой группой и делителем или к самой старой группе. После этого начинается вычисление дробных членов частного. Оно отличается от вычисления целых членов только тем, что вместо очередных цифр делимого к старым группам приписываются нули” [35, с. 35 — 36].

Анализ описанного правила деления двоичных чисел показывает, что деление сводится к двум элементарным операциям: сравнению и вычитанию двоичных чисел.

Указанное правило полностью применимо к делению чисел в коде золотой p -пропорции. При этом, однако, необходимо учитывать две особенности, связанные с выполнением операций сравнения и вычитания чисел в коде золотой пропорции.

Прежде всего заметим, что сравнение чисел в коде золотой пропорции осуществляется в минимальной форме. Отсюда вытекает, что исходные числа и все промежуточные результаты в процессе деления должны приводиться к минимальной форме.

Особенность, связанная с вычитанием, состоит в том, что при вычитании чисел в коде золотой пропорции могут возникать переносы единиц вправо за пределы разрядной сетки делителя, что приводит к изменению той части делимого, которая находится справа от группы разрядов делимого, которая на данном этапе деления сравнивается с делителем.

Поясним эти особенности на следующих примерах деления чисел в коде золотой 1-пропорции.

Пример 4.9. Разделить число $9 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0, 0\ 1\ 0\ 1$ на число $3 = 1\ 0\ 0, 0\ 1$.

Как показано выше, деление этих чисел сводится к делению числа $A = 9\ \alpha^4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1$ на число $B = 3\ \alpha^4 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$.

1) Первый шаг деления состоит в выделении в коде делимого A минимально возможной группы разрядов A_1 (со стороны старших разрядов), превышающей численно делитель B или равной ему (эта операция неявно предполагает сравнение кодов чисел A и B по величине, начиная со старших разрядов):

$$A = \underbrace{1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1}_{A_1},$$

так как $A_1 > B$.

Так как выделение такой группы разрядов в данном случае возможно, то в старший разряд частного записывается 1. После этого из кода A_1 вычитается код делителя B :

$$\begin{array}{r} A_1 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1, \\ - B = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ \hline A_2 = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1. \end{array}$$

Полученный промежуточный результат A_2 приводится к минимальной форме:

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1, \\ 1 & 0 & 0. \end{array} \right.$$

2) После этого к полученному результату приписывается следующая цифра делимого:

$$A_3 = 1\ 0\ 0\ 0$$

и полученный промежуточный результат A_3 сравнивается с делителем B . Так как $A_3 < B$ то в очередной разряд частного записывается 0.

3) К коду числа A_3 приписывается следующая (последняя) цифра делимого

$$A_4 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1$$

и происходит сравнение A_4 и B .

Так как $A_4 < B$, то очередная цифра частного равна 0.

Так как в делимом использованы все цифры, то на этом завершается определение цифр "целой" части частного.

4) На следующем шаге начинается определение цифр дробной части частного. Для этого к коду числа A_4 справа приписывается цифра 0

$$A_5 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0$$

и происходит сравнение A_5 и B . Так как $A_5 < B$, то первая после запятой цифра частного равна 0.

5) На следующем шаге происходит сравнение промежуточного результата

$$A_6 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$$

с делителем B . Так как $A_6 = B$, то в очередной разряд частного записывается 1 и делитель B вычитается из A_6 :

$$\begin{array}{r} A_6 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0, \\ - B = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ \hline A_7 = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0. \end{array}$$

На этом деление заканчивается.

Код частного R имеет вид:

$$R = 1\ 0\ 0,\ 0\ 0\ 1,$$

что соответствует числу 3.

Пример 4.10. Разделить число $5 = 1\ 0\ 0\ 0, 1\ 0\ 0\ 1$ на число $10 = 1\ 0\ 1\ 0\ 0, 0\ 1\ 0\ 1$.

Сдвигая запятую в рассматриваемых кодах на четыре разряда вправо, получаем коды новых чисел

$$A = 5 \alpha^4 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1,$$

$$\text{и } B = 10 \alpha^4 = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1,$$

над которыми будем производить деление.

1) Сравнивая число A с числом B , обнаруживаем, что $A < B$. Это означает, что в разряд единиц частного необходимо записать цифру 0.

2) Образует новый код $A_1 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0$. Так как $A_1 < B$, то в первый после запятой разряд частного необходимо записать 0.

3) Образует новый код $A_2 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$. Так как $A_2 > B$, то в следующий разряд частного запишем 1 и найдем разность $A_2 - B$:

$$\begin{array}{r} A_2 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0, \\ - B = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1. \end{array}$$

Для этого необходимо осуществить развертку кода числа A_2 :

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1, \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right.$$

и результат развертки сопоставить с кодом делителя B :

$$0 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} 0 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} 0 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}.$$

После "уничтожения" совпадающих единиц получим коды:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0. \end{array}$$

Осуществляя развертку верхнего кода

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1, \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1, \end{array}$$

и сопоставляя результат развертки с нижним кодом

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} 1\ 1 & 1, \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} 0 & 0 & \end{array}$$

получаем результат вычитания

$$A_3 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1, \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \end{array} \right.$$

Особенность промежуточного результата A_3 состоит в том, что он содержит 1 в дробной части.

4) На четвертом шаге из кода A_3 путем сдвига запятой на один разряд вправо формируем новый промежуточный код

$$A_4 = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1.$$

Заметим, что число A_4 равно исходному числу A . Это означает, что, начиная с пятого шага, процесс периодически повторяется, т. е. последующие цифры частного равны 0 0 1.

Результат деления может быть представлен, таким образом, в виде периодической дроби:

$$A/B = 1/2 = 0,0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$$

Глава 5

КОДЫ ФИБОНАЧЧИ И ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ В ЦИФРОВОЙ ТЕХНИКЕ

5.1. УСТРОЙСТВО ДЛЯ СВЕРТКИ И РАЗВЕРТКИ КОДА

1. Центральную роль при выполнении арифметических операций в системах счисления с иррациональными основаниями играют операции свертки и развертки кода. Технически устройства для свертки и развертки кода реализуются на основе двоичного регистра, между разрядами которого организуются определенные логические связи, предназначенные для анализа состояний соответствующих разрядов регистра и изменения их состояний в соответствии с условиями свертки или развертки двоичных разрядов. Процессы анализа и изменения состояний разрядов могут осуществляться синхронным или асинхронным образом.

Каждый разряд регистра для свертки или развертки кода содержит триггер и логические элементы. Свертку и развертку разрядов кода можно представить как инвертирование трех разрядов регистра, для которых выполняются условия свертки или развертки двоичных разрядов. Инвертирование состояний разрядов легко осуществлять, если триггеры имеют счетные входы. Таким образом, при построении регистров для свертки или развертки кода могут быть использованы триггеры как с отдельными, так и со счетными входами.

На рис. 5.1 изображена одна из возможных схемных реализаций регистра для свертки p -кода Фибоначчи или кода золотой p -пропорции, соответствующих значению $p = 1$.

В данном случае регистр для свертки кода содержит 5 двоичных разрядов, каждый из которых состоит из R - S -триггера и логических элементов И, ИЛИ, предназначенных для реализации операции свертки двоичных разрядов.

Элемент И1 первого разряда предназначен для выполнения операции свертки первого разряда во второй. Он подключен своими входами к прямому выходу триггера Т1 и инверсному выходу триггера Т2. Третий вход эле-

мента И1 подключен к управляющему входу С. Элемент И1 анализирует состояния триггеров Q_1 и Q_2 1-го и 2-го разрядов, и в случае выполнения условия свертки для этих разрядов ($Q_1 = 1$ и $Q_2 = 0$) после подачи на управляющий вход С логической единицы на выходе элемента И1 появляется сигнал возбуждения триггеров Т1 и Т2. Этот сигнал через соответствующие элементы ИЛИ перебрасывает триггер Т1 в состояние $Q_1 = 0$ и триггер Т2 в состояние $Q_2 = 1$, в результате чего и осуществляется свертка двоичных разрядов.

Элемент И_l l-го разряда ($l=2, 3, 4, 5$) предназначен для выполнения операции свертки ($l-1$)-го и l-го разрядов в ($l+1$)-й разряд. Он подключен своими

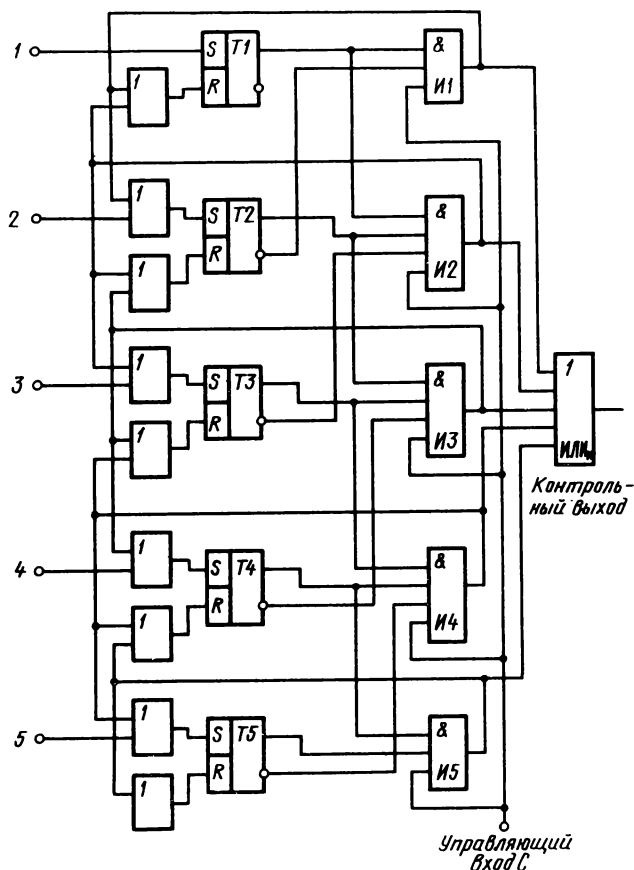


Рис. 5.1. Регистр для свертки p -кода Фибоначчи и кода золотой p -пропорции ($p=1$)

выходами к прямым выходам триггеров T_{l-1} , T_{l-2} и инверсному выходу триггера T_l . Четвертый вход элемента $И_l$ подключен к управляющему входу C . В случае выполнения условия свертки для $(l-1)$ -го, l -го и $(l+1)$ -го разрядов ($Q_{l-1} = Q_l = 1$ и $Q_{l+1} = 0$) и появления на управляющем входе сигнала $C = 1$ на выходе элемента $И_l$ появляется единичный сигнал, который через соответствующие схемы ИЛИ изменяет состояния триггеров T_{l-1} , T_l , T_{l+1} на противоположные, в результате чего осуществляется свертка $(l-1)$ -го и l -го разрядов в $(l+1)$ -й разряд.

Выходы элементов И1–И5 подключены через элемент ИЛИ_к к контрольному выходу устройства. Назначение этого элемента будет разъяснено ниже.

Регистр на рис. 5.1 функционирует следующим образом. Входная информация подается на информационные входы 1–5 регистра и через соответствующие элементы ИЛИ поступает на S -входы триггеров. После окончания сигнала записи на управляющий вход C регистра поступает единичный сигнал, который возбуждает на выходах соответствующих элементов И единичные сигналы, которые через элементы ИЛИ осуществляют инвертирование состояний определенной группы триггеров регистра. Процесс свертки кода Фибоначчи в данном устройстве протекает асинхронно; при этом длительность управляющего сигнала C должна быть не менее максимального времени, необходимого для выполнения операции свертки n -разрядного кода.

Оценим максимальное время выполнения операции свертки n -разрядного кода. Очевидно, что время выполнения свертки кода будет определяться количеством последовательно выполняемых элементарных операций свертки двоичных разрядов. Наибольшее количество сверток двоичных разрядов будет при свертке следующих характерных кодовых изображений:

```

0 1 1 1 1 1 1 1,
  └──┬──┘
1 0 0 1 1 1 1 1,
    └──┬──┘
1 0 1 0 0 1 1 1,
        └──┬──┘
1 0 1 0 1 0 0 1,
            └──┬──┘
1 0 1 0 1 0 1 0

```

и

```

0 1 0 1 0 1 0 1,
                └──┬──┘
0 1 0 1 0 1 1 0,
                └──┬──┘
0 1 0 1 1 0 0 0,
                └──┬──┘
0 1 1 0 0 0 0 0,
  └──┬──┘
1 0 0 0 0 0 0 0.

```

Нетрудно показать, что при $p = 1$ и четном количестве разрядов n максимальное количество элементарных сверток, достаточных для выполнения свертки кода, равно $n/2$.

Из анализа схемы на рис. 5.1 вытекает, что длительность элементарной свертки τ_c определяется суммой задержек сигнала в R - S -триггере (τ_T) и последовательно включенных элементах И и ИЛИ (τ_3), т. е.

$$\tau_c = \tau_T + 2\tau_3. \quad (5.1)$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что максимальная длительность свертки n -разрядного кода равна:

$$\tau = \frac{n}{2} (\tau_T + 2\tau_3). \quad (5.2)$$

Недостатком регистра на рис. 5.1 является возможность возникновения гонок в регистре в случае различия во временах срабатывания отдельных триггеров. Указанный недостаток может быть исключен за счет синхронной организации процесса изменения состояний триггеров.

2. На рис. 5.2 изображена схема еще одного варианта асинхронного устройства для свертки кода. Его особенностью является то, что в основе устройства лежит асинхронный двоичный счетчик, выполненный на счетных триггерах $T_1 - T_5$. Для реализации операций свертки двоичных разрядов в каждый разряд счетчика дополнительно введен логический элемент И.

Элемент И1 первого разряда подключен своими двумя входами к прямо-му выходу триггера T_1 и инверсному выходу триггера T_2 ; третий вход элемента И1 подключен к управляющему входу C .

В случае выполнения условия свертки для первого и второго разрядов ($Q_1 = 1$ и $Q_2 = 0$) после подачи на управляющий вход сигнала логической единицы $C = 1$ на выходе элемента И1 появляется единичный сигнал, который через счетный вход триггера T_1 перебрасывает его в состояние $Q_1 = 0$. Изменение состояния триггера T_2 осуществляется сигналом с прямого выхода триггера T_1 через счетный вход триггера T_2 .

Элемент I_l l -го разряда ($l = 2, 3, 4, 5$) подключен своими тремя входами к прямым выходам триггеров T_{l-1} , T_l и инверсному выходу триггера T_{l+1} . Четвертый вход элемента I_l подключен к управляющему входу C . При выполнении условия свертки разрядов ($Q_{l-1} = Q_l = 1$, $Q_{l+1} = 0$) и появлении сигнала $C = 1$ сигнал возбуждения, появляющийся на выходе элемента I_l , через R -вход триггера T_{l-1} перебрасывает его в состояние $Q_{l-1} = 0$, после чего триггеры T_l и T_{l+1} перебрасываются в противоположные состояния $Q_l = 0$ и $Q_{l+1} = 1$ через их счетные входы. Благодаря такой организации процесса свертки разрядов (через счетные входы триггеров) в устройстве на рис. 5.2 автоматически исключается явление гонок.

Как и в схеме на рис. 5.1, все выходы элементов И1–И5 в схеме на рис. 5.2 через элемент ИЛИ_к подключены к контрольному выходу устройства.

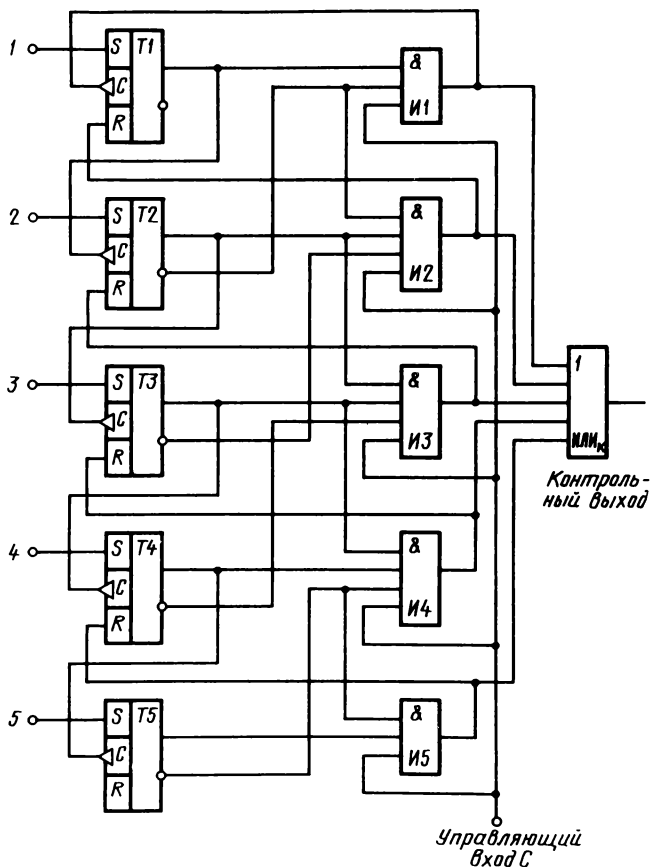


Рис. 5.2. Регистр для свертки кода на основе счетных триггеров

Рассмотренные выше принципы технической реализации устройства для свертки кода могут быть использованы также для создания устройства развертки кода, а также устройства свертки и развертки кода, которые могут иметь синхронные и асинхронные варианты реализации [36 – 41].

5.2. СУММАТОРЫ И ВЫЧИТАТЕЛИ

1. На рис. 5.3 изображена функциональная схема сумматора в кодах Фибоначчи и золотой пропорции ($p = 1$). Сумматор состоит из пяти основных блоков: многоразрядного полусумматора SM , состоящего из n одно-разрядных полусумматоров, реализующих логические уравнения (3.17) или

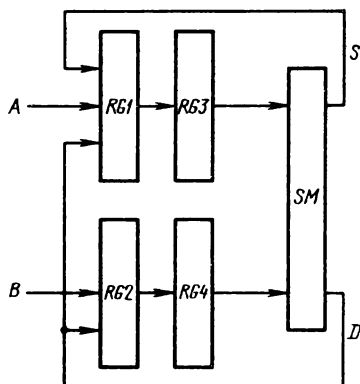
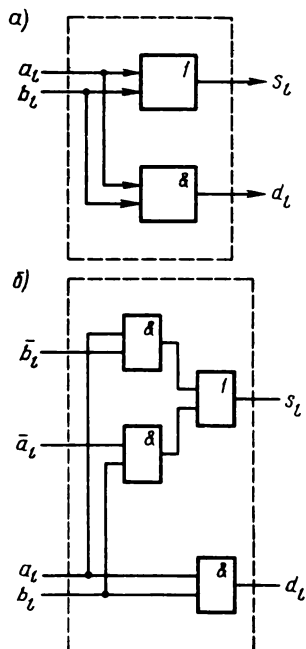


Рис. 5.3. Сумматор кодов Фибоначчи и золотой пропорции

Рис. 5.4. Одноразрядный полусумматор:

а) реализующий логические уравнения: $s_l = a_l \vee b_l$; $d_l = a_l \wedge b_l$
 б) реализующий логические уравнения: $s_l = (a_l \wedge \bar{b}_l) \vee (\bar{a}_l \wedge b_l)$; $d_l = a_l \wedge b_l$



(3.18), четырех регистров $RG1 - RG4$, первый из которых ($RG1$) выполнен по схеме на рис. 5.1 (или на рис. 5.2) и осуществляет приведение кода к минимальной форме.

На рис. 5.4, а, б изображены логические схемы одноразрядных полусумматоров в кодах Фибоначчи и золотой пропорции, реализующие соответственно логические уравнения (3.17), (3.18).

Пусть в схеме на рис. 5.3 многоразрядный полусумматор состоит из одноразрядных полусумматоров на рис. 5.4, а. Рассмотрим работу такого сумматора при сложении в коде Фибоначчи ($p = 1$) следующих чисел:

$$\begin{aligned} A &= 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0, \\ B &= 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

При сложении единиц в l -х разрядах ($1 + 1 = 111$) возникает перенос $d_l = 1$ из l -го в $(l - 1)$ -й и $(l - 2)$ -й разряды; при этом перенос в $(l - 1)$ -й разряд должен быть помещен в $(l - 1)$ -й разряд промежуточной суммы, а перенос в $(l - 2)$ -й разряд — запоминается. В схеме на рис. 5.3 это правило сложения реализуется с помощью связи, которая соединяет выход D много-

разрядного полусумматора с соответствующими входами регистра $RG1$, предназначенного для хранения промежуточных сумм S , и регистра $RG2$, предназначенного для хранения переносов D ; при этом выход d_l l -го одно-разрядного полусумматора соединяется с $(l - 1)$ -м входом регистра $RG1$ и $(l - 2)$ -м входом регистра $RG2$.

Сумматор на рис. 5.3 работает следующим образом. Коды слагаемых A и B перед сложением должны быть представлены в минимальной форме. После перезаписи кодов A и B из регистров $RG1$, $RG2$ в регистры $RG3$ и $RG4$ на выходах S и D многоразрядного полусумматора формируются коды промежуточной суммы S_1 и переноса D_1

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ +\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \hline S_1 = 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ D_1 = 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0. \end{array}$$

Промежуточная сумма S_1 сразу же помещается в регистр $RG1$. Перенос D_1 при записи в $RG1$ и $RG2$ "раздваивается" на две кодовые комбинации D'_1 и D''_1

$$\begin{array}{l} D'_1 = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0, \\ D = 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0, \\ D''_1 = 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0. \end{array}$$

Кодовая комбинация D'_1 помещается в регистр $RG1$, в результате чего в регистре $RG1$ будет содержаться сумма кодов $S'_1 = S_1 + D'_1$

$$\begin{array}{r} S_1 = 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ +\ D'_1 = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline S'_1 = 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0. \end{array}$$

После этого промежуточная сумма S'_1 приводится к минимальной форме:

$$S'_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0, \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0, \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0. \end{array} \right.$$

Этим заканчивается первый этап сложения.

Второй этап сложения начинается с перезаписи кодов S_1' и D_1'' в регистры $RG3$ и $RG4$, после чего на выходах S и D формируются новые коды S_2 и D_2 :

$$\begin{aligned} S_1' &= 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0, \\ D_1'' &= 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0, \\ D_2 &= 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0. \end{aligned}$$

Код S_2 переписывается в регистр $RG1$.

Код D_2 "раздваивается":

$$\begin{aligned} D_2' &= 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, \\ D_2 &= 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, \\ D_2'' &= 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0. \end{aligned}$$

Код D_2' добавляется к содержимому регистра $RG1$:

$$\begin{aligned} S_2 &= 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0, \\ D_2' &= 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline S_2' &= 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0. \end{aligned}$$

Код D_2'' записывается в регистр $RG2$.

Код S_2' приводится к минимальной форме:

$$S_2' = \begin{cases} 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0, \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0, \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0. \end{cases}$$

Этим заканчивается второй этап сложения.

Третий этап начинается с перезаписи содержимого регистров $RG1$ и $RG2$ в регистры $RG3$ и $RG4$; при этом на выходах S и D формируются новые коды S_3 и D_3 :

$$\begin{aligned} &+ \begin{array}{r} 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array} \\ \hline S_3 &= 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ D_3 &= 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0. \end{aligned}$$

Возникновение "нулевого" переноса D_3 свидетельствует об окончании процесса сложения.

Код S_3 помещается в регистр $RG1$. После приведения S_3 к минимальной форме получаем результат сложения:

$$S = S_3 = \begin{cases} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0, \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{cases}$$

2. Схема на рис. 5.3 реализует простейший алгоритм сложения чисел в кодах Фибоначчи и золотой пропорции. Предложены и другие варианты сумматоров в рассматриваемых кодах, описанные в [42 – 49].

Перспективной идеей являются сумматоры и вычитатели, основанные на способе "поглощения" и "уничтожения" единиц. На рис. 5.5 изображена структурная схема сумматора, реализующего сложение по способу "поглощения" единиц.

Сумматор состоит из трех блоков: регистра *RG1*, предназначенного для выполнения операции свертки кода;

регистра *RG2*, предназначенного для выполнения операции развертки кода;

блока управления *Бл У*, реализующего алгоритм сложения.

После записи кодов слагаемых *A* и *B* в регистры *RG1* и *RG2* начинается первый этап сложения. При этом по команде с блока *Бл У* в регистре *RG1* осуществляется свертка кода *A*, а в регистре *RG2* — развертка кода *B*. После этого *Бл У* анализирует содержимое регистров. При этом, если значение *l*-го разряда регистра *RG1* $a_l = 0$, а значение *l*-го разряда регистра *RG2* $b_l = 1$, то по команде с блока управления происходит инвертирование этих разрядов и таким образом осуществляется операция "поглощения" единиц. На этом заканчивается первый этап сложения.

На втором и последующих этапах осуществляется свертка содержимого *RG1* и развертка содержимого *RG2* и затем выполняется операция "поглощения" единиц.

Блок управления следит за состоянием *RG2* и, как только в нем появляется "нулевой" код, *Бл У* выдает команду окончания процесса сложения.

Структурная схема вычитателя в прямых кодах, реализующего вычитание по способу "уничтожения" единиц, ничем не отличается от схемы рис. 5.5. При этом регистры *RG1* и *RG2* выполняют операции развертки кода.

Пусть в регистр *RG1* записывается уменьшаемое *A*, а в регистр *RG2* — вычитаемое *B* и требуется вычислить разность $R = A - B$.

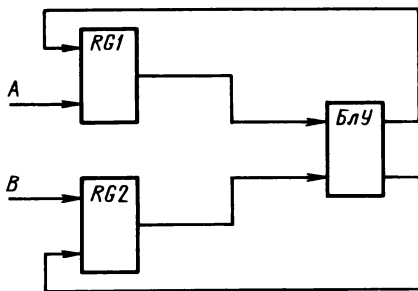


Рис. 5.5. Сумматор кодов Фибоначчи и золотой пропорции, основанный на способе "поглощения" единиц

После записи кодов A и B в регистры $RG1$ и $RG2$ начинается процесс вычитания. При этом по команде с блока Бл У в регистрах $RG1$ и $RG2$ осуществляется развертка кодов A и B . После этого Бл У анализирует содержимое регистров. Если значения l -х разрядов регистров $RG1$ и $RG2$ равны 1, т. е. $a_l = 1$ и $b_l = 1$, то по команде с блока управления происходит инвертирование этих разрядов и таким образом осуществляется "уничтожение" единиц в соответствующих разрядах $RG1$ и $RG2$.

На втором и последующих этапах вначале осуществляется развертка содержимого регистров $RG1$ и $RG2$ и затем – "уничтожение" единиц.

Блок управления следит за состоянием регистров $RG1$, $RG2$ и, как только в одном из них (например, в $RG1$) появляется "нулевой" код, блок Бл У, выдает команду окончания вычитания.

Абсолютное значение разности R хранится в другом регистре, например в $RG2$. Знак разности зависит от того, в каком регистре оказалось значение разности R . Если R хранится в регистре $RG1$, то знак разности положительный, в противном случае – отрицательный.

5.3. БЫСТРОДЕЙСТВИЕ СУММАТОРА

1. Определим длительность процесса сложения чисел в сумматоре на рис. 5.3. Длительность процесса сложения определяется длительностью одного этапа сложения и количеством таких этапов. Каждый этап сложения состоит из четырех последовательно выполняемых микроопераций:

1) Перезапись информации из регистров $RG1$ и $RG2$ в регистры $RG3$ и $RG4$. Длительность этой микрооперации равна задержке в триггере τ_T .

2) Формирование промежуточной суммы S и переноса D , осуществляемое полусумматором SM , состоящим из n одноразрядных полусумматоров. Из схемы полусумматора на рис. 5.4, а вытекает, что длительность выполнения такой микрооперации равна задержке в одном логическом элементе τ_3 .

3) Запись S и D в регистры $RG1$ и $RG2$. Длительность этой микрооперации равна длительности задержки сигнала в триггере τ_T .

4) Приведение кода в регистре $RG1$ к минимальной форме.

Количество этапов сложения определяется количеством переносов, возникающих при сложении. Как известно, возникновение переносов при сложении в классической двоичной системе счисления ($p = 0$) является фактором, принципиально ограничивающим скорость выполнения основной арифметической операции и в конечном итоге – быстродействие ЭВМ.

В классической двоичной системе счисления ($p = 0$) распространение переносов осуществляется только в одну сторону – от младших разрядов к старшим. Наиболее неблагоприятная ситуация возникает при сложении следующих n разрядов двоичных кодов:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \\
 + & \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}
 \end{array} \tag{5.4}$$

В этом случае количество последовательно возникающих переносов равно количеству единиц в двоичном коде.

Проведем анализ характера распространения переносов для кодов Фибоначчи и золотой пропорции, соответствующих $p = 1$. В этом случае, как показано в гл. 3, существует два варианта сложения одноименных разрядов с единичными значениями:

- а) $1 + 1 = 1 \ 1 \ 1$,
 б) $1 + 1 = 1 \ 0 \ 0 \ 1$.

При сложении по способу б) возникновение переносов имеет реверсивный характер, т. е. переносы осуществляются как в сторону младших, так и в сторону старших разрядов. При этом из свойства минимальной формы вытекает, что перенос из l -го разряда в $(l + 1)$ -й разряд имеет локальный характер, т. е. он не может вызвать дальнейшего распространения переноса в сторону старших разрядов при взаимодействии с цифрами $(l + 1)$ -го разряда слагаемых, так как в силу свойства минимальной формы значения цифр $(l + 1)$ -го разряда слагаемых заведомо равны нулю.

При сложении по способу а) переносы возникают только в сторону младших разрядов. При этом перенос из l -го в $(l - 1)$ -й разряд имеет локальный характер в силу свойства минимальной формы.

Перенос из l -го разряда в $(l - 2)$ -й как в способе а), так и в способе б) может вызвать перенос из $(l - 2)$ -го в $(l - 4)$ -й разряд, т. е. в данном случае последовательное распространение переноса осуществляется в сторону младших разрядов. Наиболее неблагоприятная ситуация возникает при сложении следующих кодовых комбинаций:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\
 + & \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \downarrow \uparrow & & & & & & & \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \downarrow \uparrow & & & & & & & \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \downarrow \uparrow & & & & & & & \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \downarrow \uparrow & & & & & & & \end{array}
 \end{array} \tag{5.5}$$

Стрелками показан процесс распространения переноса в сторону младших разрядов.

Ясно, что максимальное количество последовательно возникающих переносов равно максимальному количеству единиц в минимальной форме кода. При $p = 1$ и четном n максимальное количество единиц в коде равно $n/2$.

Из анализа работы сумматора на рис. 5.3 следует, что длительность операции сложения в существенной степени зависит от конфигурации 0 и 1 (т. е. взаимного расположения 0 и 1) в кодах слагаемых A и B . Рассмотрим три крайних случая конфигурации кодов и выведем оценки длительности операции сложения для этих случаев.

1. При сложении не возникает переносов и не возникает необходимости приведения кода к минимальной форме. Такая ситуация возникает, например, при сложении кодов:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ +\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0. \end{array}$$

В этом случае сложение состоит из одного этапа, включающего первые три микрооперации; при этом длительность операции сложения равна:

$$\tau_1 = 2\tau_T + \tau_3. \quad (5.6)$$

2. При сложении не возникает переносов, но возникает необходимость приведения кода к минимальной форме. В этом случае сложение состоит из одного этапа, включающего все четыре микрооперации. Наиболее неблагоприятная ситуация возникает при сложении следующих кодов:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ +\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \uparrow & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \uparrow & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & \uparrow & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \uparrow & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0, \end{array} \end{array}$$

когда операция приведения кода к минимальной форме имеет наибольшую длительность. Длительность операции сложения в этом случае вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= (n/2) (\tau_T + 2\tau_3) + 2\tau_T + \tau_3 = \\ &= [(n+4)/2] \tau_T + (n+1) \tau_3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

3. При сложении возникает наибольшее количество переносов. Эта ситуация возникает при сложении следующих кодов:

$$A = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$$

$$B = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0.$$

Сложение состоит из следующих этапов:

1-й этап:

$$\begin{array}{r} A = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ + B = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$S_1 = 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$$

$$D_1 = 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0} \\ \underbrace{1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1} \end{array} \right.$$

2-й этап:

$$\begin{array}{r} S_1 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ + D_1 = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$S_2 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0$$

$$D_2 = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0.$$

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0} \\ \underbrace{1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0} \end{array} \right.$$

3-й этап:

$$\begin{array}{r} S_2 = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ + D_2 = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$S_3 = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0$$

$$D_3 = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0$$

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0} \\ \underbrace{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0} \end{array} \right.$$

4-й этап:

$$\begin{array}{r} S_3 = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ + D_3 = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$$

$$S_4 = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$$D_4 = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

$$S_4 = \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1} \\ \underbrace{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0} \end{array} \right.$$

Сложение закончено.

Анализ третьего случая показывает, что процесс сложения двух 8-разрядных (в общем случае n -разрядных) кодов состоит из 4 (в общем случае из $n/2$) этапов. Каждый этап сложения состоит из четырех микроопераций; при этом приведение кода к минимальной форме на каждом этапе сводится к выполнению всего лишь одной операции свертки двоичных разрядов. Так как длительность одной свертки определяется выражением (5.1), то длительность одного этапа сложения в данном случае равна:

$$\tau = \tau_T + 2\tau_{\Sigma} + 2\tau_T + \tau_{\Sigma} = 3(\tau_T + \tau_{\Sigma}),$$

а длительность всего процесса сложения равна:

$$\tau_{\Sigma} = \frac{n}{2} \tau = \frac{3n}{2} (\tau_T + \tau_{\Sigma}). \quad (5.8)$$

Формулы (5.6), (5.8) определяют соответственно наименьшую и наибольшую длительность операций сложения кодов в сумматоре на рис. 5.3.

5.4. МНОЖИТЕЛЬНЫЕ И ДЕЛИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

1. Напомним, как осуществляется умножение чисел в p -кодах Фибоначчи. Для этого представим один из сомножителей в виде p -кода Фибоначчи:

$$A = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \varphi_p(l).$$

Тогда произведение AB можно записать в виде

$$A \cdot B = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \varphi_p(l) \cdot B. \quad (5.9)$$

Отсюда следует, что процесс умножения AB сводится к суммированию частичных произведений типа $\varphi_p(l) B$ с учетом значения цифры a_l в l -м разряде множителя A . Так, например, если очередная цифра множителя $a_l = 1$, то к сформированной сумме прибавляется частичное произведение $\varphi_p(l) B$; если же $a_l = 0$, то прибавления $\varphi_p(l) B$ не происходит.

Произведение $\varphi_p(l) B$ с учетом фундаментального соотношения (1.43) вычисляется по рекуррентной формуле:

$$\varphi_p(l) \cdot B = \varphi_p(l-1) B + \varphi_p(l-p-1) B. \quad (5.10)$$

При $0 \leq l \leq p$ имеем $\varphi_p(l) = 1$ и, следовательно, $\varphi_p(l) B = B$. Затем вычисляется $\varphi_p(p+1) B$, $\varphi_p(p+2) B$ и т. д., т. е. умножение чисел в p -коде Фибоначчи необходимо начинать с младших разрядов множителя.

Полученные выражения (5.9), (5.10) являются аналитической записью рассмотренного в гл. 2 египетского способа умножения в p -коде Фибоначчи. Основная особенность этого способа умножения состоит в том, что каждое последующее частичное произведение $\varphi_p(l) \cdot B$ образуется сложением предыдущих частичных произведений по рекуррентной формуле (5.10).

Из анализа формул (5.9), (5.10) вытекает, что в состав устройства умножения в p -коде Фибоначчи должны входить следующие блоки:

сумматор SM p -кодов Фибоначчи, предназначенный для накопления частичных произведений в виде (5.9);

регистр RG хранения множителя;

блок формирования частичных произведений вида $\varphi_p(l) \cdot B$, функционирующий в соответствии с формулой (5.10); в дальнейшем такой блок будем называть *блоком умножения на числа Фибоначчи* (БУЧФ).

На рис. 5.6 изображена структурная схема блока умножения на числа Фибоначчи ($p = 1$). В него входит два регистра $RG1$ и $RG2$, предназначенные для хранения частичных произведений $\varphi_1(l-1)B$ и $\varphi_1(l-2)B$, и сумматор SM , предназначенный для вычисления частичного произведения $\varphi_1(l)B$ по рекуррентной формуле (5.10). В исходном состоянии в регистре $RG1$ записан код числа B . Каждый цикл работы БУЧФ состоит в следующем. По сигналу "сложение" сумматор SM производит сложение содержимых регистров $RG1$ и $RG2$. Затем с помощью сигнала "перезапись" обеспечивается передача содержимого регистра $RG1$ в регистр $RG2$ и содержимого сумматора SM в регистр $RG1$.

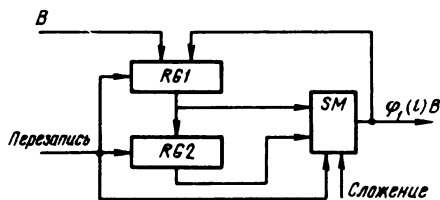


Рис. 5.6. Блок умножения на p -числа Фибоначчи

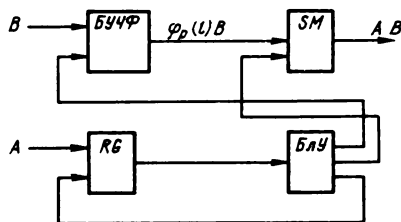


Рис. 5.7. Устройство умножения в p -коде Фибоначчи

Структурная схема устройства умножения в p -коде Фибоначчи изображена на рис. 5.7. Кроме рассмотренных выше блоков RG , SM и БУЧФ, в устройство умножения входит блок управления Бл У, реализующий алгоритм умножения. При умножении на l -й разряд множителя блок управления Бл У анализирует значение l -го разряда регистра множителя RG . Если этот разряд содержит единицу, то произведение $\varphi_p(l)B$, сформированное на выходе БУЧФ, передается на вход сумматора SM для накопления. Если цифра анали-

зируемого разряда есть 0, то передача на сумматор частичного произведения $\varphi_p(l)B$ не производится. После этого под действием управляющих сигналов с блока Бл У одновременно происходит сложение в сумматоре SM , формирование следующего частичного произведения $\varphi_p(l+1)B$ в блоке БУЧФ и сдвиг вправо на один разряд кода в регистре RG .

2. Как показано в гл. 4, правила умножения чисел в коде золотой p -пропорции ничем практически не отличаются от аналогичных правил в классической двоичной системе счисления ($p = 0$) и основываются на следующих рассуждениях. Представим один из сомножителей в виде кода золотой p -пропорции

$$A = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \alpha_p^l$$

Тогда произведение AB можно записать в виде

$$AB = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \alpha_p^l B. \quad (5.11)$$

Отсюда следует, что процесс умножения AB сводится к сложению частичных произведений типа $\alpha_p^l B$ с учетом значения цифры a_l в l -м разряде множителя A . Частичное произведение $\alpha_p^l B$ может быть получено из кода золотой p -пропорции числа B путем сдвига кода B на l разрядов влево, т. е. в сторону старших разрядов.

Структурная схема одного из возможных вариантов устройства умножения в коде золотой p -пропорции изображена на рис. 5.8.

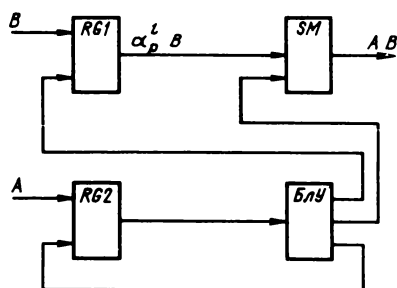


Рис. 5.8. Устройство умножения в коде золотой p -пропорции

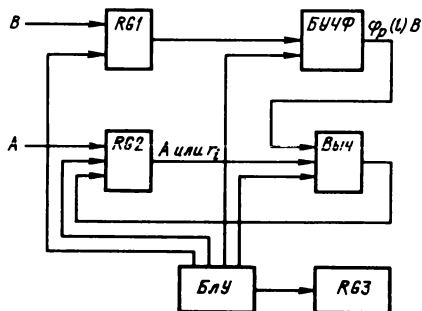


Рис. 5.9. Устройство деления в p -коде Фибоначчи

В регистре $RG1$ под действием управляющего сигнала с выхода блока управления Бл У последовательно формируются все частичные произведения $\alpha_p^l B$ путем сдвига кода числа B . На каждом шаге умножения блок Бл У анализирует содержимое регистра $RG2$ и при наличии 1 в соответствующем разряде кода числа A частичное произведение $\alpha_p^l B$ поступает в сумматор SM .

Оценим длительность операции умножения двух чисел, выполняемых в устройстве на рис. 5.8. Как следует из алгоритма умножения, определяемого выражением (5.16), длительность операции умножения зависит от количества сложений, необходимых для формирования произведений AB . Количество таких сложений определяется количеством единиц в коде множителя A . При представлении чисел в минимальной форме при $p = 1$ и четном n максимальное число единиц в коде числа A равно $n/2$, откуда вытекает, что максимальная длительность операции умножения двух n -разрядных чисел в коде золотой 1-пропорции равна

$$\tau_{\text{умн}} = n \tau_{\text{сл}}/2, \quad (5.12)$$

где $\tau_{\text{сл}}$ — длительность операции сложения в коде золотой 1-пропорции.

3. Напомним теперь, как выполняется процесс деления чисел в p -коде Фибоначчи. Для этого представим результат деления A на B в виде

$$C = A/B = \sum_{l=0}^{n-1} c_l \varphi_p(l),$$

откуда вытекает, что число A можно выразить через число B следующим образом:

$$A = \sum_{l=0}^{n-1} c_l \varphi_p(l) B. \quad (5.13)$$

Значения c_l разрядов частного определяются при этом следующим образом. Аналогично тому, как это делалось при умножении в p -кодах Фибоначчи, вычисляются частичные произведения $\varphi_p(l) B$, которые в процессе их формирования последовательно сравниваются с делимым A . Процесс образования произведений $\varphi_p(l) B$ ведется до тех пор, пока не будет найдено произведение $\varphi_p(k) B$, которое больше A . При этом все разряды частного от k -го до $(n-1)$ -го принимаются равными 0, так как соответствующие им произведения $\varphi_p(k) B$, $\varphi_p(k+1) B$, ..., $\varphi_p(n-1) B$ будут больше A и не могут входить в сумму (5.13). Наибольшим произведением, входящим в эту сумму, будет $\varphi_p(k-1) B$. Следовательно,

$$c_{n-1} = c_{n-2} = \dots = c_k = 0 \text{ и } c_{k-1} = 1.$$

После этого вычисляется остаток от деления

$$r_1 = A - \varphi_p(k-1) B = \sum_{l=0}^{k-2} c_l \varphi_p(l) B.$$

Следующие цифры частного определяются в результате сравнения очередных произведений $\varphi_p(l) B$ ($l = 0, 1, 2, \dots, k-2$) с остатком r_1 .

Если $\varphi_p(k-m) B \leq r_1 < \varphi_p(k-m+1) B$, то

$$c_{k-2} = c_{k-3} = \dots = c_{k-m+1} = 0 \text{ и } c_{k-m} = 1;$$

при этом очередной остаток r_2 вычисляется по формуле

$$r_2 = r_1 - c_{k-m} \varphi_p(k-m) B.$$

Процесс вычисления остатков и их сравнение с произведениями $\varphi_p(l) B$ продолжается до тех пор, пока очередной остаток r_i не станет меньше делителя B .

Следует отметить, что в коде частного после каждой единицы следует не менее p нулей, т. е. код частного всегда должен удовлетворять свойству минимальной формы. Как будет показано ниже, это свойство операции деления является важным контрольным соотношением при выполнении арифметических операций в коде Фибоначчи. Анализ рассмотренного способа деления показывает, что устройство деления чисел в p -коде Фибоначчи должно содержать следующие блоки (рис. 5.9):

регистр делимого $RG2$, в котором вначале хранится делимое A , а затем очередной остаток r_i ;

регистр делителя $RG1$;

блок умножения на p -числа Фибоначчи (БУЧФ), предназначенный для получения произведений $\varphi_p(l) B$;

вычитатель Выч, в котором осуществляется сравнение делимого A или остатков r_i с произведениями $\varphi_p(l) B$ и затем вычитание соответствующего произведения из делимого A или остатков r_i ;

регистр частного $RG3$;

блок управления Бл У, реализующий рассмотренный выше алгоритм деления.

Работа устройства деления на рис. 5.9 ясна из описания алгоритма деления и назначения входящих в него блоков и не требует более детального пояснения.

4. При делении чисел в коде золотой p -пропорции могут быть использованы все известные способы деления, разработанные в классической двоичной системе счисления ($p = 0$). При этом необходимо учитывать следующее.

Поскольку при делении необходимо выполнять и сложение и вычитание, то целесообразно осуществлять непосредственное вычитание, т. е. вычитание в прямых кодах.

При делении в кодах золотой p -пропорции частное всегда получается в минимальной форме. Это свойство частного может быть использовано либо для контроля, либо для ускорения процесса деления.

Структурные схемы устройств деления в коде золотой p -пропорции совпадают со схемами аналогичных устройств в классической двоичной арифметике.

5.5. ТЕХНИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОПЕРАЦИЙ СВЕРТКИ И РАЗВЕРТКИ ДВОИЧНЫХ РАЗРЯДОВ

1. Одним из основных средств обеспечения высокой помехоустойчивости цифровых систем является использование избыточных или помехоустойчивых кодов. В классической теории помехоустойчивых кодов [52] избыточность проявляет себя в кодовом или "хэмминговом" расстоянии. При этом основным направлением эффективного использования избыточности является построение кодов, которые при заданной избыточности обладают наибольшим кодовым расстоянием.

Рассматриваемые в настоящей работе коды Фибоначчи и золотой пропорции относятся к разряду избыточных кодов, в которых избыточность проявляет себя нетрадиционным образом. Как подчеркивалось выше, избыточность p -кодов Фибоначчи и кодов золотой p -пропорции порождается избыточными математическими соотношениями (1.18), (1.43), связывающими веса двоичных разрядов в рассматриваемых кодах. Эти избыточные математические соотношения порождают ряд качественных свойств, в которых и выражается избыточность кодов Фибоначчи и золотой пропорции, а также основанных на них систем счисления. Рассмотрим эти свойства:

1. Избыточные математические соотношения (1.18), (1.43) порождают две специфические операции над кодовыми изображениями, называемыми *операциями свертки и развертки* двоичных разрядов. Выполнение этих операций над кодовыми изображениями не изменяет отображаемого кодом числа и порождает свойство множественности кодовых изображений одного и того же числа.

2. Следующим свойством является свойство минимальной формы. Среди всевозможных кодовых изображений одного и того же числа существует одно и притом единственное, в котором после каждой единицы в кодовом изображении следует не менее p нулевых разрядов.

3. Наличие естественных контрольных соотношений при выполнении математических операций.

4. Существование специфических математических свойств для весов двоичных разрядов. В классическом ряду Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, таким свойством является чередование нечетных (н) и четных (ч) чисел Фибоначчи, когда после двух нечетных следует одно четное число: н, н, ч, н, н, ч, н, н, ч, н, н, .

Указанные свойства могут быть использованы для решения различных задач повышения эффективности цифровых систем, а именно:

- 1) повышения быстродействия цифровых устройств;
- 2) обнаружения ошибок в цифровых системах, возникающих в результате сбоя элементов;
- 3) улучшения контролеспособности цифровой аппаратуры.

2. Выясним прежде всего технический смысл операций свертки и развертки двоичных разрядов. Для этого проведем анализ работы устройства для свертки кода на рис. 5.2 с учетом возможных неисправностей некоторых элементов схемы, например триггера Т2 и логического элемента ИЗ. Легко показать, что неисправность схемы, состоящая в "обрыве" связи, соединяющей выход элемента ИЗ со входом триггера Т2, приведет к тому, что операция свертки следующего кода

0 0 1 1 0

никогда не будет выполнена.

При этом на выходе элемента ИЗ появляется устойчивый единичный сигнал, который через элемент ИЛИ_к поступает на контрольный выход устройства на рис. 5.2 и свидетельствует о наличии неисправности в схеме. Такой же сигнал на контрольном выходе появится при "залипании" триггера Т2 в единичном состоянии.

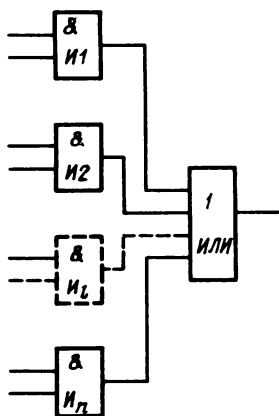


Рис. 5.10. Блок контроля кода на соответствие признаку минимальной формы

Еще больше возможностей для обнаружения неисправностей в схеме на рис. 5.1, 5.2 появится в том случае, если указанные схемы дополнить блоком контроля кода на соответствие признаку минимальной формы (рис. 5.10). Такой блок при $p = 1$ состоит из n логических элементов И на 2 входа, причем элемент И, соответствующий l -му разряду, соединен своими входами с прямыми выходами триггеров $(l - 1)$ -го и $(l - 2)$ -го разрядов, а выходы всех элементов И через элемент ИЛИ подключены к контрольному выходу устройства. Такой блок устанавливает факт неприведения кода к минимальной форме, что возможно в случае неисправностей основных элементов схемы на рис. 5.1, 5.2.

Таким образом, при технической реализации операции свертки (или развертки) двоичных разрядов приобретают смысл естественных контрольных операций, которые направлены на обнаружение неисправностей в цифровой схеме.

Этот факт придает системам счисления с иррациональными основаниями новый смысл. Так как операции свертки и развертки двоичных разрядов являются основными элементарными операциями, к которым сводится выполнение всех остальных арифметических операций, то отсюда вытекает, что выполнение основных арифметических операций сведено в таких системах счисления к контрольным операциям, направленным на обнаружение неисправностей в цифровой аппаратуре.

Важное практическое значение имеет следующее свойство цифровых автоматов на рис. 5.1, 5.2. До тех пор пока в коде, записанном в регистре, выполняется хотя бы одно условие свертки двоичных разрядов, на выходе хотя бы одного элемента И1 — И5 имеется единичный сигнал.

В этом случае после подачи управляющего сигнала $C = 1$ на контрольном выходе устройства единичный сигнал будет присутствовать до тех пор, пока в регистре осуществляется приведение кода к минимальной форме, т. е. в регистрах на рис. 5.1, 5.2 можно фиксировать моменты окончания переходного процесса.

Как подчеркивается в [53], "возможность определения точных моментов окончания переходных процессов в схеме сулит ряд заманчивых перспектив, а именно:

а) длительность такта работы устройства равна реальной длительности переходного процесса в нем, и, следовательно, устройство работает на предельно возможной скорости;

б) изменение физических параметров схемы под влиянием изменения внешних условий или старения не приводит к выходу схемы из строя, а лишь изменяет скорость ее работы;

в) выход из строя элемента схемы эквивалентно незавершению переходного процесса, что приводит к остановке устройства и исключает неправильное срабатывание. Факт незавершения переходного процесса в течение установленного критического времени говорит о неисправности схемы; поэтому сравнительно простыми средствами можно организовать автоматическую диагностику и локализацию неисправностей;

г) наличие сигналов "пуска" и "завершения" переходных процессов позволяет, во-первых, проводить автономную проверку блоков и узлов устройства и, во-вторых, не требует специальных средств при сочленении устройств с различными временными характеристиками, что, в свою очередь, облегчает модернизацию устройства за счет замены блоков и узлов более производительными".

Цифровые автоматы, допускающие индикацию моментов окончания переходных процессов, получили название *апериодических автоматов* [53]. Апериодические автоматы совмещают в себе положительные качества синхронных и асинхронных логических схем и позволяют, в частности, повысить быстродействие вычислительных устройств. Другой важной особенностью апериодических автоматов является то, что они являются самоконтролирующимися автоматами, позволяющими осуществлять автономный контроль и диагностику цифровых устройств.

Проанализируем теперь работу сумматора и вычитателя, структурные схемы которых изображены на рис. 5.5. Для этого заметим, что свернутое и развернутое изображения числа в p -коде Фибоначчи и коде золотой p -пропорции при $p = 1$ имеют простые контрольные признаки, а именно:

в свернутом изображении двух единиц в коде не встречается, например

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1, \\ \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0, \\ \underbrace{} & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0; \end{array}$$

в развернутом изображении, начиная со старшего значащего разряда, двух нулей в коде не встречается, например

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0, \\ \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1. \end{array}$$

Проверка этих контрольных признаков может осуществляться блоком Бл У на каждом этапе сложения или вычитания; при этом в схеме на рис. 5.5 будет осуществляться непрерывный оперативный контроль регистров $RG1$ и $RG2$.

3. Кроме операций свертки и развертки кода для контроля исправности цифровой аппаратуры могут использоваться специфические математические свойства чисел Фибоначчи.

Как установлено выше, ряд Фибоначчи ($p = 1$) представляет собой периодическую последовательность нечетных и четных чисел:

н, н, ч, н, н, ч, н, ч, . . . ,

т. е. нечетными являются числа Фибоначчи со следующими номерами:

0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, . . .

Из определения кода Фибоначчи числа N как суммы чисел Фибоначчи с двоичными коэффициентами вытекает, что информация о четности или нечетности числа N содержится в тех разрядах кода Фибоначчи, веса которых являются нечетными числами. При этом четность числа $f(N)$ есть логическая функция:

$$f(N) = \sum_i a_i \pmod{2}, \quad (5.14)$$

где i — номер разряда кода Фибоначчи, вес которого является четным числом, т. е.

$i = 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots$

Если $f(N) = 0$, то число N является четным; в противном случае — нечетным.

Рассмотрим некоторый код Фибоначчи:

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 — номер разряда,
 $N =$ 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0.

Для определения четности числа N подсчитаем сумму единиц в разрядах

0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10. Так как число единиц нечетно, то $f(N) = 1$ и число N является нечетным. Действительно, $N = 2 + 5 + 21 + 89 = 117$.

Логическое выражение (5.14) реализуется с помощью широко распространенной в ЦВМ схемы, получившей название *схемы свертки по модулю 2*.

Соотношение (5.14) может быть использовано для контроля ряда операций в коде Фибоначчи. Первыми из таких операций являются свертка и развертка двоичных разрядов. Как известно, фундаментальное свойство этих операций состоит в том, что они не изменяют изображаемого кодом числа и, следовательно, его четности. Таким образом, если в процессе выполнения операций свертки или развертки кода значение четности числа $f(N)$ изменится, то это свидетельствует о неисправности устройства свертки или развертки кода, либо о сбое информации.

Принцип четности может быть эффективно использован для контроля арифметических операций. В основе контроля лежат следующие математические соотношения между четными и нечетными числами:

$$\begin{aligned} n \pm c &= n, \\ c \pm c &= c, \\ n \pm n &= c; \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} n \cdot c &= n, \\ c \cdot c &= c, \\ n \cdot n &= n. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Первое из этих соотношений (5.15) может быть использовано для контроля операций сложения (вычитания) натуральных чисел в коде Фибоначчи, а второе (5.16) — для контроля операции умножения.

5.6. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВА МИНИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ КОДА

1. Идея минимальной формы p -кода Фибоначчи (и кода золотой p -пропорции) приводит к разбиению n -разрядных двоичных слов на два непересекающихся подмножества. К первому относятся "разрешенные" кодовые комбинации, удовлетворяющие признаку минимальной формы и используемые для кодирования информации в ЦВМ. Ко второму — "запрещенные" кодовые комбинации, не удовлетворяющие признаку минимальной формы. Принцип контроля информации в ЦВМ состоит в проверке соответствия кодовой комбинации признаку минимальной формы. Если под действием "помех" происходит переход "разрешенной" кодовой комбинации в запрещенную, то такая ошибка обнаруживается. Ошибочный переход минимальной формы одного числа в минимальную форму другого числа не обнаруживается. Заметим, что так как признаком минимальной формы является наличие не менее p нулей после каждой единицы кода, то ошибочная

замена любой 1 на 0 в минимальной форме p -кода Фибоначчи не обнаруживается, т. е. множество минимальных форм n -разрядного p -кода Фибоначчи образует избыточный код, ориентированный на обнаружение асимметричных ошибок типа перехода $0 \rightarrow 1$.

Описанное свойство минимальной формы может быть использовано для контроля информации в пассивных цепях передачи и хранения информации, в частности в регистрах.

Технически указанный способ контроля реализуется с помощью устройства контроля кода на соответствие признаку минимальной формы. Схема такого устройства при $p = 1$ изображена на рис. 5.10.

Оценим потенциальную ошибкообнаруживающую способность рассмотренного способа избыточного кодирования информации по методике А. А. Харкевича [52]. Множество "разрешенных" кодовых комбинаций совпадает с множеством n -разрядных минимальных форм p -кода Фибоначчи и содержит $\varphi_p(n)$ кодовых комбинаций, где $\varphi_p(n)$ — n -е p -число Фибоначчи.

Число всех возможных n -разрядных двоичных комбинаций равно 2^n , из них $\varphi_p(n)$ являются "разрешенными", а $2^n - \varphi_p(n)$ — "запрещенными".

В результате воздействия "помех" каждая из $\varphi_p(n)$ "разрешенных" кодовых комбинаций может перейти в одну из 2^n возможных комбинаций, т. е. общее число возможных переходов в системе:

$$Q_{\Sigma} = \varphi_p(n) \cdot 2^n.$$

При этом ошибка обнаруживается во всех случаях, когда одна из "разрешенных" комбинаций переходит в одну из $2^n - \varphi_p(n)$ "запрещенных" комбинаций, т. е. число обнаруживаемых переходов:

$$Q_{\text{обн}} = \varphi_p(n) [2^n - \varphi_p(n)].$$

Коэффициент обнаружения ошибок равен отношению числа обнаруживаемых переходов к их общему числу:

$$S_{\text{обн}} = Q_{\text{обн}}/Q_{\Sigma} = 1 - \varphi_p(n)/2^n.$$

Представление о значении $S_{\text{обн}}$ при различных значениях разрядности кода n для случая 1-кода Фибоначчи дают следующие данные:

n	10	20	30	40
$S_{\text{обн}}, \%$	91,32	98,25	99,87	99,99

2. Свойство минимальной формы порождает ряд контрольных соотношений при выполнении арифметических и логических операций в кодах Фибоначчи и золотой пропорции.

Например, при сравнении чисел из основного свойства минимальной формы вытекает, что после поступления на вход схемы сравнения кодов двух одноименных значащих разрядов (1 и 1) на последующих p тактах поразрядного сравнения должны поступать одни нули. Нарушение этого условия является признаком ошибки при сравнении чисел.

Как подчеркивалось выше, код результата деления чисел в кодах Фибоначчи и золотой пропорции должен удовлетворять признаку минимальной формы. Нарушение этого условия является признаком ошибки при делении чисел.

При выполнении операции сложения чисел, выполняемой в сумматоре на рис. 5.3, также обеспечивается глубокий контроль преобразований информации в сумматоре. При записи кодов слагаемых A и B в регистры $RG1$, $RG2$ осуществляется контроль кодов на соответствие признаку минимальной формы.

После образования промежуточной суммы S и переноса D также возникает ряд контрольных соотношений. Прежде всего отметим, что код переноса D всегда должен удовлетворять признаку минимальной формы. Это контрольное соотношение может быть проверено как на выходе D , так и на выходе регистров $RG2$, $RG4$ после перезаписи информации с помощью схемы рис. 5.10.

Коды промежуточной суммы S' и переноса D можно представить в виде

$$S' = s_{n-1} s_{n-2} \dots s_l \dots s_1 s_0, \\ D = d_{n-1} d_{n-2} \dots d_l \dots d_1 d_0.$$

Из свойства минимальной формы вытекает следующее контрольное соотношение, связывающее значения разрядов s_l и d_{l-1}

$$s_l \wedge d_{l-1} = 0,$$

где $l = 1, 2, \dots, n-1$.

После приведения содержимого регистра $RG1$ к минимальной форме с помощью устройства на рис. 5.10, подключаемого к выходам регистра $RG1$, осуществляется контроль кода на соответствие признаку минимальной формы. После перезаписи этого кода в регистр $RG3$ опять может быть осуществлен контроль кода на соответствие признаку минимальной формы.

Таким образом, свойство минимальной формы позволяет обеспечить глубокий контроль арифметического устройства ЦВМ.

3. Свойство минимальной формы p -кодов Фибоначчи может быть использовано в системах цифровой регистрации информации с последовательной записью двоичной информации для повышения эффективности и достоверности записи информации.

В системах цифровой магнитной записи широкое применение получил

способ записи, называемый способом БВНМ (без возвращения к нулю, модифицированный) [54]. При таком способе записи каждой "единице" (или "нулю") информации, поступающей на запись, соответствует перепад тока в магнитной головке. При этом верхний уровень тока I_B намагничивает носитель до насыщения в одном направлении, нижний — I_H — в противоположном направлении. При воспроизведении каждому перепаду намагниченности носителя соответствует импульс с магнитной головки, что свидетельствует о наличии "единицы" (или "нуля") информации. Отсутствие перепада в заданный момент времени свидетельствует о наличии "нуля" (или "единицы") информации.

Пример формирования сигнала магнитной записи из двоичного кода приведен на рис. 5.11, а, где "нуль" информации вызывает перемагничивание носителя, а "единица" перемагничивания не вызывает.

Серьезной проблемой при воспроизведении сигнала цифровой магнитной записи является разделение и различение последовательности двоичных цифр. Для ее решения всегда должны быть предусмотрены специальные средства для воспроизведения синхросигналов, с помощью которых и осуществляется разделение цифр.

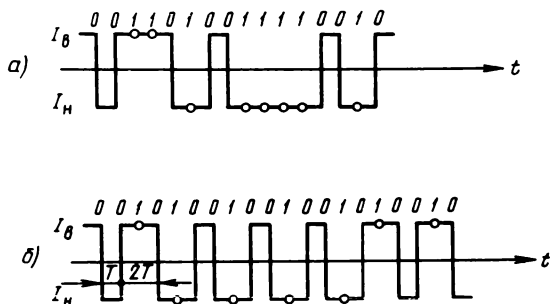


Рис. 5.11. Магнитная запись по методу БВНМ (без возвращения к нулю, модифицированный)

Известно несколько направлений решения этой задачи. Одним из них является применение специальных самосинхронизирующихся кодов. В основе теории самосинхронизирующихся кодов лежит следующая идея. Как показывает анализ БВНМ-записи на рис. 5.11, а, наибольшая трудность при воспроизведении возникает в тех случаях, когда в двоичной последовательности содержится достаточно длинная "пачка" из одних "единиц" (или "нулей"). Очевидно, что проблема воспроизведения цифровой магнитной записи будет значительно упрощена, если наложить определенные ограничения на длину "пачки" из единиц информации. Наиболее простым решением явля-

ется применение кодов, в которых двух единиц рядом не встречается. Но указанное ограничение является основным свойством минимальной формы кода Фибоначчи! Впервые на такое использование кодов Фибоначчи обратил внимание Котс в работе [12].

На рис. 5.11, б показан пример формирования сигнала БВНМ-записи при использовании кода Фибоначчи. Обозначим через T – период исходной двоичной последовательности. Анализ сигнала БВНМ-записи, сформированного из кода Фибоначчи, показывает, что последовательность переключений тока записи в этом случае содержит две основные частоты с периодами T и $2T$. Такой БВНМ-сигнал называется *двухчастотным сигналом* [54]. Из двухчастотного сигнала можно легко сформировать синхросигнал – в этом и состоит свойство самосинхронизации кода Фибоначчи.

Кроме этого коды Фибоначчи хорошо согласуются с каналами цифровой магнитной записи в силу следующих причин:

1. Отличительной особенностью канала магнитной записи является ограничение частотного диапазона (полосы пропускания) не только сверху, но и снизу, так как канал не пропускает постоянную составляющую. Двухчастотный БВНМ-сигнал, формируемый из кода Фибоначчи, приближается к периодической последовательности и обладает узкой частотной полосой, которая хорошо согласуется с каналом цифровой магнитной записи.

2. При БВНМ-записи основное влияние на достоверность магнитной записи оказывают так называемые "выпадения", т. е. отсутствие перепадов намагничивания. В примере рис. 5.11 это соответствует возникновению несимметричной ошибки типа $0 \rightarrow 1$. Коды Фибоначчи являются асимметричными кодами, обладающими высокой ошибкообнаруживающей способностью для ошибок типа $0 \rightarrow 1$, и с этой точки зрения они хорошо согласуются с методом БВНМ. При организации дополнительной проверки на четность определенных групп разрядов в коде Фибоначчи можно исправлять высокий процент несимметричных ошибок и тем самым повысить достоверность цифровой магнитной записи.

5.7. ЦИФРО-АНАЛОГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ [55 – 59]

1. Классические избыточные коды возникли в рамках систем передачи информации и получили практическое применение прежде всего в этой области цифровой техники. Как известно, общий принцип построения избыточного n -разрядного двоичного кода состоит в разбиении множества n -разрядных двоичных слов на два непересекающихся подмножества, разрешенные и запрещенные кодовые комбинации (КК), причем для кодирования используются разрешенные КК. Ошибка обнаруживается во всех случаях, когда под действием "помех" в цифровом канале разрешенная КК переходит в запрещенную.

Очень скоро обнаружилось, что применение классических избыточных кодов в других областях цифровой техники является малоэффективным. Ярким примером в этом отношении являются АЦП и ЦАП. Низкая эффективность применения классических избыточных кодов в АЦП и ЦАП может быть объяснена двумя принципиальными особенностями "аналого-цифрового и цифро-аналогового каналов" по сравнению с традиционным "цифровым каналом":

1. Для "цифрового канала" характерна однородность формы представления входной и выходной информации, причем код, поступающий на вход кодирующего устройства, "известен" перед началом кодирования, а из него по определенным правилам формируется избыточный код. В "аналого-цифровом и цифро-аналоговом каналах" формы представления информации на входе и выходе АЦП и ЦАП принципиально разнородны.

В АЦП исходное сообщение является непрерывной величиной, причем значение этой величины "неизвестно" перед началом кодирования. Задача АЦП состоит в том, чтобы раскрыть эту неопределенность, т. е. превратить "неизвестное" значение величины в "известный" код. Поэтому при первом рассмотрении возникает естественное сомнение в правомерности применения к АЦП идеи избыточного кодирования о разбиении КК на выходе АЦП на разрешенные и запрещенные, так как неясен способ, позволяющий выделить разрешенные и запрещенные КК в процессе аналого-цифрового преобразования величины, значение которой неизвестно.

Еще сомнительнее, на первый взгляд, представляется применение центральной идеи избыточного кодирования к ЦАП, так как в данном случае выходная информация представлена в непрерывной форме.

2. Для "цифрового канала" безразлично, является ли кодовая информация, поступающая в канал, изображением числа или какого-либо нечислового символа. В отличие от этого информация, поступающая в "аналого-цифровой и цифро-аналоговый каналы", всегда является числовой информацией. При этом принцип действия АЦП и ЦАП полностью определяется некоторым способом представления, кодирования числа, т. е. системой счисления, применяемой в АЦП и ЦАП.

Из проведенных рассуждений вытекает два принципиальных вывода:

1. Развитие методов введения кодовой избыточности в АЦП и ЦАП тесно связано с развитием теории избыточных систем счисления.

2. В АЦП и ЦАП должны быть применены другие, отличные от классических, методы введения и использования кодовой избыточности, учитывающие специфику "аналого-цифрового и цифро-аналогового каналов".

В настоящем и следующем параграфах делается попытка показать, что коды Фибоначчи и золотой пропорции относятся к разряду избыточных измерительных кодов, принципы построения которых хорошо согласуются со спецификой "аналого-цифрового и цифро-аналогового каналов".

2. Принцип построения ЦАП в кодах Фибоначчи и золотой пропорции, как и ЦАП в классическом двоичном коде ($p = 0$), основан на физическом моделировании математических выражений (3.1), (4.2). При этом значения эталонов, моделирующих веса разрядов, выбираются пропорциональными либо p -числам Фибоначчи, либо степеням золотой p -пропорции.

Так как ряд степеней золотой p -пропорции образует геометрическую прогрессию, т. е. $\alpha_p^{l+1} = \alpha_p^l \cdot \alpha_p$, а отношение соседних p -чисел Фибоначчи в пределе стремится к золотой p -пропорции, то ЦАП в кодах (3.1), (4.2) для электрических величин может быть выполнен на резистивном цепном делителе с ограниченным количеством номиналов резисторов, что облегчает технологические проблемы изготовления таких ЦАП в микроэлектронном исполнении.

На рис. 5.12 изображена схема 5-разрядного (в общем случае n -разрядного) резистивного делителя для реализации математического выражения (4.2).

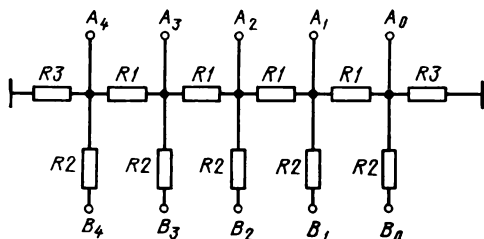


Рис. 5.12. Резистивный делитель в коде золотой p -пропорции

Указанный резистивный делитель содержит резисторы трех номиналов:

$$R1 = \alpha_p^{-p} R; R2 = \alpha_p^{p+1} R; R3 = \alpha_p R, \quad (5.17)$$

где α_p — золотая p -пропорция; R — эталонное сопротивление.

В частности, при $p = 1$ сопротивления резисторов $R1, R2, R3$ равны:

$$\begin{aligned} R1 &= \alpha^{-1} R \approx 0,618034 R; \\ R2 &= \alpha^2 R \approx 2,618034 R; \\ R3 &= \alpha R \approx 1,618034 R. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Важно подчеркнуть, что в резистивном делителе (рис. 5.12) важны не сами сопротивления резисторов, задаваемые выражениями (5.17), (5.18), а их отношения:

$$R2/R3 = \alpha_p^p; R2/R1 = \alpha_p^{p+1}. \quad (5.19)$$

В частности, при $p = 1$

$$R2/R3 = \alpha; R2/R1 = \alpha^3. \quad (5.20)$$

Резистивный делитель на рис. 5.12 является обобщением классического двоичного делителя типа $R - 2R$, в который он вырождается при $p = 0$. Действительно, подставив значение $p = 0$ в (5.17), (5.19) и учитывая, что $\alpha_0 = 2$, получаем:

$$R1 = R; R2/R3 = 1; \quad R2 = R3 = 2R; R2/R1 = 2.$$

Подключим теперь внешние выводы $B_0 - B_4$ к земляной шине и проведем электрический анализ делителя на рис. 5.12 с учетом следующих соотношений для золотой p -пропорции:

$$\alpha_p = 1 + \alpha_p^{-p}; \quad (5.21)$$

$$\alpha_p^{p+2} = \alpha_p^{p+1} + \alpha_p. \quad (5.22)$$

Прежде всего вычислим эквивалентное сопротивление резистивной цепочки, состоящей из параллельно включенных резисторов $R2$ и $R3$ (рис. 5.13, а):

$$R'_3 = \frac{R2 \cdot R3}{R2 + R3} = \frac{\alpha_p^{p+1} \cdot R \cdot \alpha_p R}{\alpha_p^{p+1} R + \alpha_p R} = R. \quad (5.23)$$

При упрощении выражения (5.23) использовалось тождество (5.22).

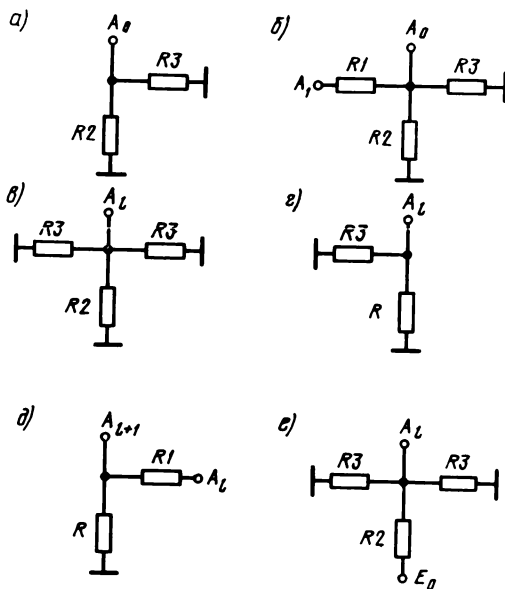


Рис. 5.13. Эквивалентные схемы резистивного делителя

Вычислим теперь эквивалентное сопротивление R_3'' резистивной цепочки, состоящей из резисторов $R1$, $R2$ и $R3$, соединенных по схеме рис. 5.13, б.

Учитывая (5.21), можно записать

$$R_3'' = R1 + R = \alpha_p^{-p} R + R = \alpha_p R. \quad (5.24)$$

Из (5.24) вытекает, что

$$R_3'' = R3. \quad (5.25)$$

С учетом (5.25) легко показать, что эквивалентная схема части резистивного делителя, находящейся справа или слева от любой точки A_l , сводится к эквивалентной схеме рис. 5.13, б.

С учетом этого обстоятельства на рис. 5.13, в изображена эквивалентная схема делителя рис. 5.12, составленная для вычисления эквивалентного сопротивления R_3 делителя в точке A_l . Исходя из схемы рис. 5.13, а и учитывая (5.23), схему на рис. 5.13, в можно упростить до схемы рис. 5.13, г. Из схемы рис. 5.13, г вытекает, что эквивалентное сопротивление делителя в точке A_l ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$) равно:

$$R_3''' = \frac{R3R}{R3 + R} = \frac{\alpha_p R R}{\alpha_p R + R} = \frac{\alpha_p}{\alpha_p + 1} R = \frac{1}{1 + \alpha_p^{-1}} R. \quad (5.26)$$

Заметим, что при $p = 0$ $\alpha_0 = 2$ и выражение (5.26) принимает вид: $R_3''' = 2R/3$.

При $p = 1$ $\alpha_p = \alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, а $1 + \alpha^{-1} = \alpha$ и выражение (5.26) запишется так:

$$R_3''' = \alpha^{-1} R = (\sqrt{5} - 1) R/2.$$

Вычислим теперь коэффициент передачи по напряжению от точки A_l к точке A_{l+1} . Для этого воспользуемся эквивалентной схемой рис. 5.13, д, откуда вытекает

$$k_u = U_{l+1}/U_l,$$

где U_l и U_{l+1} — потенциалы точек A_l и A_{l+1} .

Очевидно, что

$$U_{l+1} = U_l R/(R1 + R) = [U_l / (\alpha_p^{-p} + 1)] = U_l / \alpha_p,$$

откуда следует, что

$$k_u = 1/\alpha_p,$$

т. е. коэффициент передачи по напряжению от точки A_l к точке A_{l+1} есть величина, обратная золотой p -пропорции, т. е. основанию системы счисления.

3. Делитель на рис. 5.12 может быть использован для преобразования ко-

да золотой p -пропорции в электрическое напряжение по принципу суммирования как токов, так и напряжений.

В режиме суммирования токов выводы B_l заземлены, а выводы A_l подключены к генераторам эталонных токов I_0 через токовые ключи (вывод A_4 при этом является выходом ЦАП и соответствует старшему разряду кода, а A_0 соответствует младшему разряду кода).

Код золотой p -пропорции

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0, \quad (5.27)$$

подаваемый на вход ЦАП, управляет состоянием токовых ключей. Если $a_l = 1$, то токовый ключ l -го разряда подключает генератор эталонного тока I_0 к точке A_l ; при этом в точке A_l формируется следующее электрическое напряжение:

$$U_l = \beta_p I_0 R,$$

где

$$\beta_p = 1 / (1 + \alpha_p^{-1}).$$

От точки A_l к точке A_{n-1} (выход ЦАП) напряжение передается с коэффициентом

$$1/\alpha_p^{n-l-1}$$

т. е. на выходе ЦАП будет сформировано напряжение

$$U_{\text{вых}} = \frac{\beta_p I_0 R}{\alpha_p^{n-l-1}} = \frac{\beta_p I_0 R}{\alpha_p^{n-1}} \alpha_p^l.$$

Используя принцип суперпозиции, легко показать, что при подаче на вход ЦАП кода (5.27) на его выходе сформируется напряжение

$$U_{\text{вых}} = \frac{\beta_p I_0 R}{\alpha_p^{n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} a_l \alpha_p^l,$$

где $a_l \in \{0, 1\}$ — двоичная цифра в l -м разряде кода (5.27).

В режиме суммирования напряжений клеммы B_l через ключи напряжения подключаются либо к источнику эталонного напряжения E_0 (если $a_l = 1$), либо к земляной шине (если $a_l = 0$). При подключении клеммы B_l к источнику напряжения E_0 в точке A_l формируется электрическое напряжение U_l , которое может быть вычислено, если воспользоваться эквивалентной схемой рис. 5.13, е. При этом

$$U_l = \frac{E_0}{R2 + \frac{1}{2} R3} \cdot \frac{1}{2} R3 = \frac{E_0}{\alpha_p^{p+1} R + \frac{1}{2} \alpha_p R} \cdot \frac{1}{2} \alpha_p R = \gamma_p E_0,$$

где $\gamma_p = \alpha_p^{-p} / (1 + \alpha_p) = (\alpha_p - 1) / (\alpha_p + 1)$.

От точки A_l к точке A_{n-1} (выход ЦАП) напряжение U_l передается с коэффициентом

$$1/\alpha_p^{n-l-1},$$

т. е. на выходе ЦАП будет сформировано напряжение:

$$U_{\text{вых}} = \frac{\gamma_p E_0}{\alpha_p^{n-1}} \cdot \alpha_p^l.$$

Используя принцип суперпозиции, легко показать, что при подаче на вход ЦАП кода (5.27) на его выходе сформируется напряжение

$$U_{\text{вых}} = \frac{\gamma_p E_0}{\alpha_p^{n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} a_l \alpha_p^l.$$

4. В процессе производства и эксплуатации АЦП и ЦАП возникает необходимость контроля характеристики преобразования.

В современных ЦАП, построенных на основе классического двоичного кода ($p = 0$), широко применяется способ метрологического контроля линейности ЦАП, основанный на проверке следующего математического тождества, связывающего веса двоичных разрядов:

$$2^m = \sum_{l=0}^{m-1} 2^l + 1. \quad (5.28)$$

Положенные в основу кодов Фибоначчи и золотой пропорции фундаментальные соотношения (1.18), (1.43), связывающие веса двоичных разрядов, обеспечивают значительно более широкие возможности для осуществления метрологического контроля ЦАП.

В частности, метрологический контроль ЦАП в коде золотой пропорции ($p = 1$) сводится к проверке выполнения следующих соотношений между весами двоичных разрядов:

$$\alpha^m = \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} = \alpha^{m-1} + \alpha^{m-3} + \alpha^{m-4} = \\ = \alpha^{m-1} + \alpha^{m-3} + \alpha^{m-5} + \alpha^{m-6} \quad \text{и т. д.}$$

Технически это реализуется путем проверки постоянства выходного напряжения (или тока) ЦАП на следующих кодовых наборах:

$$\alpha^m = \begin{cases} \overbrace{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0}^m, & 0, \\ 0 \ 1 \ \underbrace{1 \ 0 \ 0 \ 0} & 0, \\ 0 \ 1 \ 0 \ \underbrace{1 \ 1 \ 0} & 0. \end{cases}$$

Как известно, метрологический контроль ЦАП, основанный на проверке математического тождества (5.28), возможен только на специальных кодовых наборах (типа $1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0$ и $0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1$). Использование (5.28)

для оперативного контроля ЦАП, т. е. для контроля ЦАП в процессе выполнения основной функции, затруднительно.

Множественность кодового представления чисел (величин) в кодах Фибоначчи и золотой пропорции позволяет контролировать ЦАП на любом кодовом наборе непосредственно в процессе выполнения основной функции. Например, если ЦАП в коде Фибоначчи ($p = 1$) преобразует код числа 74 в аналоговую величину, то, последовательно осуществляя все свертки и развертки двоичных разрядов кода, можно контролировать ЦАП на соответствие метрологическим характеристикам:

$$74 = \begin{cases} \begin{array}{ccccccccccc} & + \Delta \\ 55 & 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & = 74 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & = 74 + \Delta \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & = 74 + \Delta \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & = 74 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & = 74. \end{array} \end{cases}$$

В рассмотренном примере вес 21 выполнен с положительной погрешностью Δ , что обнаруживается на ряде кодовых наборов по отклонению выходной величины ЦАП от постоянного значения ($74 + \Delta$). Технически это реализуется подключением к выходу ЦАП устройства для выделения переменной составляющей сигнала, причем по амплитуде переменной составляющей можно судить о величине отклонения весов разрядов от номинальных значений.

5.8. АНАЛОГО-ЦИФРОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ [60–66]

1. Алгоритмы функционирования и структурные схемы АЦП в кодах Фибоначчи и золотой пропорции ничем принципиально не отличаются от алгоритмов и структурных схем АЦП в классическом двоичном коде.

Однако положенные в основу этих кодов избыточные соотношения (1.18), (1.43), связывающие веса двоичных разрядов, придают АЦП в кодах Фибоначчи и золотой пропорции ряд новых качественных свойств.

Рассмотрение особенностей алгоритма поразрядного кодирования в кодах Фибоначчи и золотой пропорции начнем с примера преобразования аналоговой величины A в n -разрядный p -код Фибоначчи для случаев $n = 10$, $p = 1$ и $p = 2$. Для этого предположим, что значения A находятся в диапазоне $0 \leq A < \varphi_p(n)$, а уравнивание в процессе поразрядного кодирования осуществляется эталонными величинами, равными p -числам Фибоначчи $\varphi_p(n-1), \varphi_p(n-2), \dots, \varphi_p(0)$.

В рассматриваемых примерах: а) при $p = 1$ $\varphi_1(10) = 89$, а уравнивание осуществляется 1-числами Фибоначчи: 55; 34, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1, 1;

б) при $p = 2$ $\varphi_2(10) = 28$, а уравнивание осуществляется 2-числами Фибоначчи: 19, 13, 9, 6, 4, 3, 2, 1, 1, 1.

На первом шаге алгоритма происходит сравнение величины A , значения которой находятся в диапазоне $0 \leq A < \varphi_p(n)$ с весом $\varphi_p(n-1)$ старшего разряда, т. е. с $\varphi_1(9) = 55$ при $p = 1$ и $\varphi_2(9) = 19$ при $p = 2$.

Рассмотрим результаты сравнения A с $\varphi_p(n-1)$ для трех возможных значений A :

1) $A < \varphi_p(n-1)$; 2) $A > \varphi_p(n-1)$; 3) $A = \varphi_p(n-1)$.

В первом случае результат сравнения на первом шаге будет нулевым и значение двоичной цифры в $(n-1)$ -м разряде принимается равным нулю, т. е. $a_{n-1} = 0$. На следующем шаге происходит сравнение величины A с весом $\varphi_p(n-2)$ следующего по старшинству разряда; при этом результат сравнения на втором шаге может быть как нулевым, так и единичным.

Во втором случае результат сравнения на первом шаге будет единичным, т. е. $a_{n-1} = 1$. В соответствии с алгоритмом поразрядного кодирования для определения значения следующего разряда образуется разность $A_1 = A - \varphi_p(n-1)$, которая сравнивается на втором шаге с весом $\varphi_p(n-2)$ следующего по старшинству разряда.

Оценим значение разности A_1 . Так как в этом случае $\varphi_p(n-1) \leq A < \varphi_p(n)$, то разность $A_1 = A - \varphi_p(n-1)$ находится в пределах:

$$0 \leq A_1 < \varphi_p(n) - \varphi_p(n-1) = \varphi_p(n-p-1). \quad (5.29)$$

Для рассматриваемых примеров, когда $n = 10$, $p = 1$ и $p = 2$, неравенство (5.29) принимает вид:

$$а) 0 \leq A_1 < \varphi_1(10) - \varphi_1(9) = \varphi_1(8) = 34;$$

$$б) 0 \leq A_1 < \varphi_2(10) - \varphi_2(9) = \varphi_2(7) = 6.$$

В силу (5.29) результат сравнения разности A_1 с весами $\varphi_p(n-2)$, $\varphi_p(n-3)$, ..., $\varphi_p(n-p-1)$ будет заведомо нулевым. Это означает, что после каждого единичного результата сравнения должно следовать не менее p нулевых. Например, если $76 < A < 77$, то на выходе АЦП при $p = 1$ появится следующая кодовая комбинация:

$$\begin{array}{cccccccc} 55 & 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \end{array} \quad (5.30)$$

которая является "фибоначчиевым" изображением числа 76.

При преобразовании величины $26 < A < 27$ на выходе АЦП в 2-коде Фибоначчи появится кодовая комбинация:

$$\begin{array}{cccccccc} 19 & 13 & 9 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1, \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \end{array}$$

которая является 2-кодом Фибоначчи числа 26.

Пусть теперь $A = \varphi_p(n-1)$. В этом случае возникает ситуация неопределенности, так как с равной вероятностью может быть реализован как единичный, так и нулевой результат сравнения. Если $a_{n-1} = 1$, то образуется разность $A_1 = A - \varphi_p(n-1) = 0$ и все последующие результаты сравнения A_1 с весами $\varphi_p(n-2), \varphi_p(n-3), \dots, \varphi_p(0)$ будут заведомо нулевыми, т. е. на выходе АЦП в 1- и 2-коде Фибоначчи появятся следующие кодовые комбинации:

$$\begin{aligned} &55 \quad 34 \quad 21 \quad 13 \quad 8 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1, \\ 55 = & \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0, \\ &19 \quad 13 \quad 9 \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1, \\ 19 = & \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0. \end{aligned}$$

Если же $a_{n-1} = 0$, то на следующем шаге величина $A = \varphi_p(n-1)$ сравнивается с весом $\varphi_p(n-2)$ следующего разряда; при этом результат сравнения всегда будет единичным, т. е. $a_{n-2} = 1$. В соответствии с алгоритмом поразрядного кодирования образуется разность $A_2 = A - \varphi_p(n-2) = \varphi_p(n-1) - \varphi_p(n-2) = \varphi_p(n-p-2)$. Эта разность на следующих $(p-1)$ шагах сравнивается с "фибоначчиевыми" весами $\varphi_p(n-3), \varphi_p(n-4), \dots, \varphi_p(n-p-1)$, и при этом на каждом шаге реализуется нулевой результат сравнения, т. е.

$$a_{n-3} = a_{n-4} = \dots = a_{n-p-1} = 0.$$

При сравнении разности $A_2 = \varphi_2(n-p-2)$ с весом $\varphi_p(n-p-2)$ опять возникает ситуация неопределенности, т. е. результат сравнения может быть как нулевым, так и единичным.

Нетрудно показать, что при $p = 1$ в случае $A = \varphi_1(9) = 55$ с равной вероятностью может быть реализована одна из следующих кодовых комбинаций:

$$\begin{aligned} &55 \quad 34 \quad 21 \quad 13 \quad 8 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ &\quad \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (a) \\ &55 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \uparrow & \uparrow & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & \uparrow & \uparrow & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \end{array} \quad (b) \end{aligned} \quad (5.31)$$

При преобразовании величины A , равной сумме двух чисел Фибоначчи, например $A = 55 + 21 = 76$, на выходе "фибоначчиевого" АЦП при $p = 1$ могут появиться следующие кодовые комбинации:

$$A = 76 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccccccccc} 55 & 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (5.32)$$

Кодовые комбинации (5.31), (5.32) являются различными "фибоначчиевыми" представлениями чисел $A = 55$ и $A = 76$, причем комбинации (а) являются минимальными формами этих чисел. В каждой из остальных кодовых комбинаций (б) нарушение минимальной формы (группа из двух расположенных рядом единиц) наблюдается только в одном месте, причем справа от выделенной группы единичных разрядов следуют разряды с нулевыми значениями, а слева от нее кодовая комбинация имеет вид минимальной формы.

При $p = 2$ и $n = 10$ при преобразовании величины $A = \varphi_2(n - 1) = 19$ на выходе АЦП могут появиться следующие кодовые комбинации:

$$19 = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccccccccc} 19 & 13 & 9 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}$$

При этом кодовая комбинация (а) является минимальной формой числа 19 в 2-коде Фибоначчи, а остальные кодовые комбинации (б) не удовлетворяют признаку минимальной формы. При этом нарушение (группа из двух единиц, расположенных на расстоянии $p = 2$) наблюдается в них только в одном месте, причем справа от выделенной группы разрядов следуют разряды с нулевыми значениями, а часть кодовой комбинации, расположенная слева от выделенной группы разрядов, удовлетворяет признаку минимальной формы.

Все эти рассуждения и выводы полностью сохраняют силу и для кодов "золотой" p -пропорции.

В АЦП поразрядного кодирования, построенного на основе классического двоичного кода, все кодовые комбинации на выходе АЦП являются "разрешенными"; поэтому по виду выходного кода нельзя судить о нарушениях

в работе АЦП. Избыточные соотношения между весами двоичных разрядов в кодах Фибоначчи и золотой пропорции, задаваемые выражениями (1.18), (1.43), накладывают жесткие ограничения на вид кодовой комбинации (КК), которая может появиться на выходе АЦП поразрядного кодирования. К разряду разрешенных КК относятся КК двух типов:

1) КК, удовлетворяющие признаку минимальной формы, т. е. такие, в которых после каждой единицы слева направо следует не менее p нулей;

2) КК, в которых нарушение минимальной формы состоит в появлении одной и притом единственной группы из двух единиц, расположенных на расстоянии p , между которыми находится ровно $p - 1$ нулей (т.е. группы вида $0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{p-1} \ 0 \ 1 \ 0$), причем справа от выделенной группы разрядов следу-

ют разряды с нулевыми значениями, а часть КК, расположенная слева от этой группы разрядов, удовлетворяет признаку минимальной формы. КК, относящиеся к одному из указанных типов, будем называть метрологически корректными КК, все остальные КК — метрологически некорректными.

Итак, в АЦП на основе кодов Фибоначчи и золотой пропорции реализуется фундаментальная идея о разбиении всех КК на выходе АЦП на разрешенные (метрологически корректные) и запрещенные (метрологически некорректные), что может быть эффективно использовано для решения задач метрологического контроля АЦП.

2. В зависимости от конкретных условий применения установленное выше свойство АЦП в кодах Фибоначчи и золотой пропорции может быть использовано для решения различных задач, возникающих при проектировании и эксплуатации АЦП, в частности для повышения помехоустойчивости, живучести, улучшения контролеспособности АЦП.

Пусть в рассмотренном выше примере (5.30) результат сравнения величины $76 < A < 77$ с весом $\varphi_1(n-1) = 55$ под воздействием "помех" оказался ошибочным, т. е. вместо $a_{n-1} = 1$ получен ложный результат $a_{n-1} = 0$. Если все остальные результаты сравнения являются верными, то на выходе АЦП появится метрологически некорректная КК:

$$\begin{array}{cccccccc} 55 & 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1, \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \end{array} \quad (5.33)$$

которая свидетельствует об ошибке преобразования. Существенно подчеркнуть, что в данном случае АЦП в коде Фибоначчи не только обнаружил ошибку сравнения, но и исправил ее, так как полученный код является другим изображением числа 76.

Таким образом, АЦП в кодах Фибоначчи и золотой пропорции обладает способностью обнаруживать и исправлять определенные виды ошибок сравнения, возникающих под воздействием помех, и в этом смысле можно го-

ворить о повышенной помехоустойчивости АЦП в кодах Фибоначчи и золотой пропорции.

Пусть теперь в АЦП произошел отказ типа постоянного невключения триггера старшего разряда. В этом случае при кодировании всех величин, превышающих вес старшего разряда, будут появляться метрологически некорректные КК типа (5.33).

При этом об отказе старшего разряда свидетельствует постоянное появление запрещенных КК при $A > \varphi_1(n-1) = 55$. Существенно подчеркнуть, что функции АЦП при таком отказе не нарушаются, так как значение старшего разряда компенсируется двумя соседними младшими разрядами $\varphi_1(n-2) = 34$ и $\varphi_1(n-3) = 21$, а на выходе АЦП появляется другое кодовое изображение преобразуемой величины A .

Наибольший интерес представляет возможность определения погрешности линейности АЦП, обусловленной отклонениями весов разрядов от номинальных значений, на основании анализа выходных кодов АЦП.

Действительно, если в примере (5.31) вес старшего разряда отклонился в положительную сторону на величину $\Delta = +5$, то в окрестности значений $54 \leq A \leq 60$ на выходе АЦП будут появляться следующие КК:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & 60 & 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
 54 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0, \\
 55 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \\
 56 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0, \\
 57 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \\
 58 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0, \\
 59 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0, \\
 60 = & \begin{cases} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{cases}
 \end{array} \tag{5.34}$$

Анализ КК в (5.34) позволяет сделать следующие выводы.

1. "Фибоначчиевы" изображения чисел 56, 57, 58, 59 в (5.34) имеют вид метрологически некорректных КК, что свидетельствует о нарушении линейности характеристики преобразования.

2. По виду метрологически некорректных КК можно судить о величине погрешности линейности. Действительно, анализируя "фибоначчиевы" изображения числа 60, нетрудно установить, что информация о значении отклонения $\Delta = +5$ заключена в первом из этих изображений:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \\
 & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & & & \\
 & & & \text{код } \Delta & & & & & & & &
 \end{array}$$

3. Несмотря на отклонение веса старшего разряда от своего номинального значения, характеристика преобразования АЦП по координате A сохраняет

свойство непрерывности, так как каждому числовому значению A соответствует некоторое "фибоначчиево" изображение.

Отклонение $\Delta = +5$ веса старшего разряда можно легко определить также с помощью следующей измерительной процедуры. Подключим ко входу АЦП некоторый вспомогательный сигнал $A_{всп}$, который больше веса старшего разряда с учетом его возможных положительных отклонений, например $A_{всп} = 72$. Этот сигнал кодируется дважды, причем в первом цикле кодирование начинается со старшего разряда. Результат кодирования имеет вид

$$\begin{array}{cccccccccccc} 60 & 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1, \\ 72 = & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0. \end{array} \quad (5.35)$$

Во втором цикле кодирования запрещается включение старшего разряда, т. е. кодирование осуществляется разрядами, имеющими "идеальные" веса; при этом результат кодирования имеет вид

$$\begin{array}{cccccccccccc} 60 & 34 & 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1, \\ 72 = & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0. \end{array} \quad (5.36)$$

В "идеальном" коде Фибоначчи КК (5.35) изображает число 67, а КК (5.36) — число 72; разность между ними равна отклонению веса старшего разряда от своего "идеального" значения. Отсутствие "разрывов" в характеристике преобразования при достаточно больших отклонениях весов разрядов от своих номинальных значений и наличие простых процедур определения таких отклонений является качественно новым свойством АЦП и ЦАП в кодах Фибоначчи и золотой пропорции, которые позволяют реализовать идею цифровой коррекции погрешностей линейности АЦП и ЦАП. Для реализации такой идеи АЦП и ЦАП должен иметь арифметический блок (например, на основе микропроцессора), который вычисляет поправки к коду, компенсирующие погрешности АЦП и ЦАП.

В работе [66] описан высокоточный аналого-цифровой преобразователь на основе кода с иррациональным основанием, погрешность которого (0,005 %) оказалась в 100 раз ниже погрешности резистивной сетки за счет применения нового способа коррекции систематических погрешностей.

Таким образом, применение кодов Фибоначчи и золотой пропорции в технике АЦП и ЦАП открывает следующие перспективы [20]:

1. Создание самоконтролирующихся АЦП и ЦАП, в которых метрологический контроль и контроль исправности АЦП и ЦАП осуществляется непрерывно в процессе выполнения основной функции.

2. Создание самокорректирующихся АЦП и ЦАП, в которых за счет цифровой коррекции погрешности линейности может быть достигнута точность, превышающая технологическую точность "изготовления" весов разрядов.

Предложенный подход может привести к созданию высокоточных АЦП и ЦАП, метрологические характеристики которых инвариантны по отноше-

нию к временному и температурному дрейфу аналоговых элементов, моделирующих веса разрядов, а также к созданию микроэлектронных АЦП и ЦАП, точность которых превышает технологическую точность "изготовления" таких элементов. Этот результат имеет особенно важное значение в так называемых аналоговых микропроцессорах, т. е. в микропроцессорах с АЦП и ЦАП на входе и выходе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Несмотря на то, что в цифровой вычислительной технике в настоящее время почти безраздельно господствуют позиционные системы счисления с естественными весами разрядов, интерес к другим системам счисления остается высоким. В качестве примера достаточно привести систему остаточных классов [67], нега-позиционные системы счисления, факториальные, с мнимым основанием и др. [68].

Рассмотренные в настоящей монографии системы счисления с иррациональными основаниями (p -коды Фибоначчи и коды золотой p -пропорции) являются новым направлением в теории систем счисления. Указанные системы счисления занимают промежуточное положение между унитарной (или унарной) и классической двоичной системой счисления, включая последние в качестве крайних частных случаев ($p = \infty$ и $p = 0$).

2. Следует подчеркнуть ряд особенностей предложенных систем счисления. Во-первых, они являются двоичными по количеству цифр (0, 1), используемых для изображения чисел, и, следовательно, для их реализации требуется такая же элементная база, как и для классической двоичной системы счисления. Во-вторых, они являются позиционными системами счисления и сохраняют все их известные преимущества (простота сравнения чисел по величине и "наглядность" в изображении чисел, простота арифметических правил, возможность представления чисел с фиксированной и плавающей запятой, однородность и итеративность реализующих арифметику структур и др.).

В-третьих, предложенные системы счисления обладают избыточностью, которая может быть использована для решения задачи "сквозного" контроля цифровой системы на всех уровнях ее организации, начиная с операционных элементов (счетчиков, регистров, сумматоров).

3. Вопрос о преимуществах применения предложенных систем счисления в "большой" вычислительной технике по сравнению с известными способами контроля ЦВМ на данном этапе развития теории систем счисления с иррациональными основаниями является спорным и его решение требует дальнейших исследований. Однако уже сейчас можно выделить отдельные области цифровой техники, где применение кодов Фибоначчи и золотой пропорции может оказаться рациональным. Прежде всего имеется в виду циф-

ровая измерительная техника (включая технику АЦП и ЦАП) и цифровая метрология, где применение кодов Фибоначчи и золотой пропорции может привести к повышению точности, метрологической стабильности, улучшению контролеспособности измерительных и метрологических систем.

Новый этап в развитии микропроцессорной техники связывают с созданием аналогового микропроцессора, имеющего аналоговые вход и выход. Применение здесь кодов Фибоначчи и золотой пропорции может привести к существенному снижению требований к технологической точности изготовления аналоговой части микропроцессора (АЦП и ЦАП), так как повышение точности и поддержание метрологической стабильности будет осуществляться цифровой коррекцией погрешностей АЦП и ЦАП.

4. Современный этап в развитии систем телефонии, записи и воспроизведения звука, радиовещания и телевидения характеризуется тенденцией к переходу на цифровую форму представления информации. Так как необходимым элементом таких систем являются АЦП и ЦАП, а проблема разделения, синхронизации двоичных символов в кодовой последовательности является актуальной, то следует ожидать, что применение здесь кодов Фибоначчи как системных кодов, позволяющих решить как проблему контроля АЦП, ЦАП, так и проблему синхронизации, окажется эффективным.

5. Рассматриваемые коды связаны с двумя замечательными математическими открытиями – числами Фибоначчи и золотым сечением, которые обнаружены в произведениях искусства, ботанических, биологических, физических и геометрических структурах.

Золотая p -пропорция и p -числа Фибоначчи расширяют наши представления о фундаментальных числовых закономерностях природы и искусства и открывают новые перспективы исследований.

ТАБЛИЦЫ p -ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И СТЕПЕНЕЙ "ЗОЛОТОГО" p -СЕЧЕНИЯ

Т а б л и ц а 1

$p = 1$			
n	$\varphi_1(n)$	α_1^n	α_1^{-n}
1	1	.161803398874 _ю 1	.618033988749 _ю 0
2	1	.261803398874 _ю 1	.381966011250 _ю 0
3	2	.423606797749 _ю 1	.236067977499 _ю 0
4	3	.685410196624 _ю 1	.145898033750 _ю 0
5	5	.110901699437 _ю 2	.901699437490 _ю -1
6	8	.179442719099 _ю 2	.557280900010 _ю -1
7	13	.290344418537 _ю 2	.344418537480 _ю -1
8	21	.469787137637 _ю 2	.212862362520 _ю -1
9	34	.760131556174 _ю 2	.131556174960 _ю -1
10	55	.122991869381 _ю 3	.813061875570 _ю -2
11	89	.199005024998 _ю 3	.502499874060 _ю -2
12	144	.321996894379 _ю 3	.310562001510 _ю -2
13	233	.521001919378 _ю 3	.191937872550 _ю -2
14	377	.842998813758 _ю 3	.118624128960 _ю -2
15	610	.136400073313 _ю 4	.733137435860 _ю -3
16	987	.220699954689 _ю 4	.453103853780 _ю -3
17	1597	.357100028003 _ю 4	.280033582070 _ю -3
18	2584	.577799982692 _ю 4	.173070271710 _ю -3
19	4181	.934900010696 _ю 4	.106963310360 _ю -3
20	6765	.151269999338 _ю 5	.661069613520 _ю -4
21	10946	.244760000408 _ю 5	.408563490080 _ю -4
22	17711	.396029999747 _ю 5	.252506123430 _ю -4
23	28657	.640790000156 _ю 5	.156057366650 _ю -4
24	46368	.103681999991 _ю 6	.964487567830 _ю -5
25	75025	.167761000006 _ю 6	.596086098650 _ю -5
26	121393	.271442999996 _ю 6	.368401469190 _ю -5
27	196418	.439204000003 _ю 6	.227684629460 _ю -5
28	317811	.710646999998 _ю 6	.140716839720 _ю -5
29	514229	.114985100000 _ю 7	.869677897390 _ю -6
30	832040	.186049800000 _ю 7	.537490499850 _ю -6
31	1346269	.301034900000 _ю 7	.332187397540 _ю -6
32	2178309	.487084700000 _ю 7	.205303102310 _ю -6
33	3524578	.788119600000 _ю 7	.126884295220 _ю -6
34	5702887	.127520430000 _ю 8	.784188070880 _ю -7
35	9227465	.206332390000 _ю 8	.484654881370 _ю -7
36	14930352	.333852820000 _ю 8	.299533189500 _ю -7
37	24157817	.540185210000 _ю 8	.185121691870 _ю -7
38	39088169	.874038030000 _ю 8	.114411497630 _ю -7

$p = 2$			
n	$\varphi_2(n)$	α_2^n	α_2^{-n}
1	1	.146557123187 _ю 1	.682327803828 _ю 0
2	1	.214789903570 _ю 1	.465571231870 _ю 0
3	1	.314789903570 _ю 1	.317672196170 _ю 0
4	2	.461347026758 _ю 1	.216756571951 _ю 0
5	3	.676136930327 _ю 1	.147899035700 _ю 0
6	4	.990926833897 _ю 1	.100915624220 _ю 0
7	6	.145227386065 _ю 2	.688575362460 _ю -1
8	9	.212841079098 _ю 2	.469834114840 _ю -1
9	13	.311933762488 _ю 2	.320580879740 _ю -1
10	19	.457161148553 _ю 2	.218741247620 _ю -1
11	28	.670002227651 _ю 2	.149253235090 _ю -1
12	41	.981935990139 _ю 2	.101839632110 _ю -1
13	60	.143909713869 _ю 3	.694880125260 _ю -2
14	88	.210909936634 _ю 3	.474136029790 _ю -2
15	129	.309103535647 _ю 3	.323516195920 _ю -2
16	189	.453013249517 _ю 3	.220744095460 _ю -2
17	277	.663923186152 _ю 3	.150619833860 _ю -2
18	406	.973026721800 _ю 3	.102772100450 _ю -2
19	595	.142603997131 _ю 4	.701242615990 _ю -3
20	872	.208996315746 _ю 4	.478477334120 _ю -3
21	1278	.306298987927 _ю 4	.326478388570 _ю -3
22	1873	.448902985058 _ю 4	.222765281870 _ю -3
23	2745	.657899300805 _ю 4	.151998945540 _ю -3
24	4023	.964198288732 _ю 4	.103713106700 _ю -3
25	5896	.141310127379 _ю 5	.707663363230 _ю -4
26	8641	.207100057459 _ю 5	.482858388480 _ю -4
27	12664	.303519886332 _ю 5	.329467703770 _ю -4
28	18560	.444830013712 _ю 5	.224804974740 _ю -4
29	27201	.651930071171 _ю 5	.153390684710 _ю -4
30	39865	.955449957504 _ю 5	.104662729020 _ю -4
31	58425	.140027997121 _ю 6	.714142900390 _ю -5
32	85626	.205221004238 _ю 6	.487279556840 _ю -5
33	125491	.300765999988 _ю 6	.332484389870 _ю -5
34	183916	.440793997111 _ю 6	.226863343540 _ю -5
35	269542	.646015001349 _ю 6	.154795166970 _ю -5
36	395033	.946781001339 _ю 6	.105621046320 _ю -5
37	578949	.138757499845 _ю 7	.720681765750 _ю -6
38	848491	.203358999979 _ю 7	.491741206480 _ю -6
39	1243524	.298037100114 _ю 7	.335528697470 _ю -6

1. Тиммердинг Г. Е. Золотое сечение Пер. с нем. — Петроград: научное книгоизд-во, 1924 86 с.
2. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978. 144 с.
3. Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве./Пер. с франц. — М.: Изд-во академии архитектуры, 1936. 236 с.
4. Сабанеев Л. Этюды Шопена в освещении закона золотого сечения. — М.: Искусство, 1925, № 2, с. 133.
5. Грим Г. Д. Пропорциональность в архитектуре. — Л.—М.: ОНТИ, 1935. 148 с.
6. Соколов А. Тайны золотого сечения. — Техника молодежи, 1978, № 5, с. 40—43.
7. Латышев Л., Латышев В. По единым законам гармонии. — Техника молодежи, 1979, № 10, с. 24—26.
8. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. Пер. с англ. — М.: Наука, 1957. 268 с.
9. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ, т. 3: "Сортировка и поиск"/Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. 844 с.
10. Марутаев М. А. О гармонии как закономерности. — В кн.: Принцип симметрии. — М.: Наука, 1978, с. 363—395.
11. Дельсон В. Закономерности универсальной гармонии. — Советская музыка, № 12, 1969, с. 70—78.
12. Kautz W. H. Fibonacci codes for synchronization control. — IEE Trans. Inform Theory, 1965, V. 11, № 8, p. 284—292.
13. Bergman G. A number system with an irrational base. — Mathematics Magazine, 1957, № 31, p. 98—119.
14. Стахов А. П. Принцип асимметрии логики измерения. — Проблемы передачи информации, 1976, т. XII, вып. 3, с. 69—77.
15. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. — М.: Сов. радио, 1977. 288 с.
16. Стахов А. П. Алгоритмическая теория измерения. — М.: Знание, серия Математика, кибернетика, № 6, 1979. 64 с.
17. Стахов А. П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. — В сб.: "Современные проблемы метрологии". — М.: Издание Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978, с. 51—65.
18. Stakhov A. P. Fibonacci and "golden" Ratio Codes. — Fault-tolerant Systems and Diagnostic. FTSD-78, Gdansk, 78, p. 276—285.
19. Стахов А. П. "Золотая" пропорция в цифровой технике. — Автоматика и вычислительная техника, 1980, № 1, с. 27—33.
20. Стахов А. П. Перспективы применения систем счисления с иррациональными основаниями в технике аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования. — Измерения, контроль, автоматизация, № 6 (40), 1981, с. 3—9.
21. Стахов А. П. Использование естественной избыточности "фибоначчиевых" систем счисления для контроля вычислительных систем. — Автоматика и вычислительная техника, 1975, № 6, с. 80—87.
22. Стахов А. П. Фибоначчиевы двоичные позиционные системы счисления. — В кн.: Кодирование и передача дискретных сообщений в системах связи. — М.: Наука, 1976, с. 155—179.
23. Стахов А. П., Луещкий В. А. Машинная арифметика ЦВМ в кодах Фибоначчи и золотой пропорции. — М.: Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме. "Кибернетика", 1981. 64 с.
24. Feinberg M. A. Lucas triangle. — The Fibonacci Quarterly, 1967, V. 5, № 5, p. 486—490.
25. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975. 208 с.

26. Реньи А. Трилогия о математике/Пер. с венг. — М.: Мир, 1980. 376 с.
27. История математики в 3-х томах. — М.: Наука, 1970, т. 1. 351 с.
28. Марков А. А. О логике конструктивной математики. — М.: Знание, 1972, 48 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия Математика, кибернетика, № 8).
29. Вейль Г. О философии математики. — М.—Л.: 1934, ... с.
30. Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. — М.: Энергия, 1975. 448 с.
31. Алиев Т. М., Дамиров Д. И., Шеххиханов А. М. Введение в алгоритмические основы цифровых измерений. — Измерения, контроль, автоматизация, № 3, 1981, с. 3—11.
32. Демпан И. Я. История арифметики. — М.: Учпедгиз, 1959. 423 с.
33. Кольман Э. История математики в древности. — М.: Физматгиз, 1961. 235 с.
34. Нейгебауер О. Лекции по истории античных математических наук. Догреческая математика. — М.—Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937, т. 1. 243 с.
35. Палернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирования. — М.: Наука, 1965. 560 с.
36. Стахов А. П., Фомичев А. В. Устройство для приведения p -кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авт. свидетельство № 662930. — БИ, 1979, № 18.
37. Стахов А. П. и др. Устройство для приведения p -кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авт. свидетельство № 779997. — БИ, 1980, № 42. Авторы изобретения: А. П. Стахов, В. А. Лужецкий, А. Д. Азаров, Ю. Н. Ужвак.
38. Стахов А. П., Козак А. А., Соляниченко Н. А. Устройство для приведения p -кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авт. свидетельство № 840880. — БИ, 1981, № 23.
39. Стахов А. П., Соляниченко Н. А. Устройство для приведения p -кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авт. свидетельство № 842786. — БИ, 1981, № 24.
40. Стахов А. П. и др. Устройство для приведения p -кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авт. свидетельство № 842782. — БИ, 1981, № 24. Авторы изобретения: А. П. Стахов, Н. А. Соляниченко, А. И. Черняк, В. В. Замчевский.
41. Стахов А. П. и др. Способ приведения p -кода Фибоначчи к минимальной форме и устройство для его осуществления. Патенты: № 2359460 (Франция), № 2732008 (ФРГ), № 4161725 и № 4187500 (США), № 1543302 (Англия). Авторы изобретения: А. П. Стахов, Ю. М. Вишняков, В. А. Лужецкий, А. В. Оводенко, Н. А. Соляниченко, А. В. Фомичев.
42. Стахов А. П., Оводенко А. В., Лужецкий В. А. Параллельный сумматор. Авт. свидетельство № 559237. — БИ, 1977, № 19.
43. Стахов А. П., Лужецкий В. А., Оводенко А. В. Комбинационный сумматор. Авт. свидетельство № 570896. — БИ, 1977, № 32.
44. Стахов А. П., Оводенко А. В., Лужецкий В. А. Накапливающий сумматор. Авт. свидетельство № 577528. — БИ, 1977, № 39.
45. Стахов А. П., Оводенко А. В., Лужецкий В. А. Последовательный сумматор. Авт. свидетельство № 696452. — БИ, 1979, № 41.
46. Стахов А. П. Сумматор кодов Фибоначчи. Авт. свидетельство № 732864. — БИ, 1980, № 17.
47. Стахов А. П. и др. Параллельный сумматор кодов Фибоначчи. Авт. свидетельство № 840891. — БИ, 1981, № 23. Авторы изобретения: А. П. Стахов, Н. А. Соляниченко, В. А. Лужецкий, А. В. Оводенко, А. А. Козак.
48. Стахов А. П. Сумматор кодов Фибоначчи. Патенты: № 1565460 (Англия), № 4159529 (США), № 7738258 (Франция).
49. Стахов А. П. и др. Параллельный сумматор кодов Фибоначчи. Патент США № 4276608. Авторы изобретения: А. П. Стахов, Н. А. Соляниченко, В. А. Лужецкий, А. В. Оводенко, А. А. Козак.

50. Стахов А. П., Лужецкий В. А. Устройство для умножения целых чисел. Авт. свидетельство № 662941, БИ, 1979, № 18.
51. Стахов А. П., Лужецкий В. А. Устройство для деления. Авт. свидетельство № 744564. — БИ, 1980, № 24.
52. Харкевич А. А. Борьба с помехами. — М.: Физматгиз, 1963. 276 с.
53. Аperiodические автоматы (под ред. В. И. Варшавского). — М.: Наука, 1976. 424 с. Авторы: А. Г. Астановский, В. И. Варшавский, В. Б. Мараховский, В. А. Песчанский, Л. Я. Розенблум, Н. А. Стародубцев, Р. Л. Финкельштейн, Б. С. Цирлин.
54. Рыжков В. А., Сергеев Н. П., Раков Б. М. Внешние ЗУ на магнитном носителе. — М.: Энергия, 1978. 224 с.
55. Стахов А. П. Цифро-аналоговый преобразователь. Авт. свидетельство № 809540. — БИ, 1981, № 8.
56. Стахов А. П. Цифро-аналоговый преобразователь. Авт. свидетельство № 809541. — БИ, 1981, № 8.
57. Стахов А. П. Аналого-цифровой преобразователь. Авт. свидетельство № 809542. — БИ, 1981, № 8.
58. Стахов А. П. Цифро-аналоговый преобразователь. Патент ГДР № 140187.
59. Стахов А. П. Цифро-аналоговый преобразователь для генерации линейно-изменяющейся величины. Патент ГДР № 138400.
60. Стахов А. П. Аналого-цифровой преобразователь по методу сравнения и вычитания. Патент ГДР № 141033.
61. Стахов А. П. Преобразователь аналоговых величин в p -код Фибоначчи. Патенты: № 1566978 (Англия), № 7739466 (Франция), № 133373 (ГДР).
62. Стахов А. П., Азаров А. Д., Лужецкий В. А. Аналого-цифровой преобразователь. Авт. свидетельство № 758510. — БИ, 1980, № 31.
63. Стахов А. П., Азаров А. Д., Моисеев В. И. Аналого-цифровой преобразователь. Авт. свидетельство № 783979. — БИ, 1980, № 44.
64. Стахов А. П., Азаров А. Д., Моисеев В. И. Аналого-цифровой преобразователь. Авт. свидетельство № 788372. — БИ, 1980, № 47.
65. Стахов А. П. и др. Аналого-цифровой преобразователь. Авт. свидетельство № 790285. — БИ, 1980, № 47. Авторы изобретения: А. П. Стахов, А. Д. Азаров, Ю. Н. Ужвак, А. Г. Рубин.
66. Стахов А. П., Азаров А. Д., Моисеев В. И. и др. Высокоточный самокорректирующийся аналого-цифровой преобразователь на основе кодов с иррациональными основаниями. — Киев: ИК АН УССР, 1982. 35 с. (АН УССР, Ин-т кибернетики, Препринт — 82—24).
67. Акушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. — М.: Сов. радио, 1968. 440 с.
68. Касаткин В. Н. Новое о системах счисления. — Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982. 96 с.

- Адам 7
 Азаров А. Д. 129, 136, 142
 Айгнер 7
 Айер 7
 Акушский И. Я. 143
 Аристотель 26
 Астановский А. Г. 123
 Баше де Мезириак 29
 Бергман Д. (Bergman G. A.) 5, 6, 69, 77
 Варшавский В. М. 123
 Вейль Г. 27
 Виленкин Н. Я. 17
 Вишняков Ю. М. 123
 Воробьев Н. Н. 4, 17, 18
 Гика М. 4, 5
 Гильберт Д. 5
 Гитис Э. И. 29, 30
 Гримм Г. Д. 5
 Дамиров Д. И. 29
 Дельсон В. 5
 Депман И. Я. 29
 Евдокс 26
 Евклид 4
 Кантор Г. 26
 Касаткин В. Н. 143
 Котс (Kautz W. H.) 5, 129
 Кеплер И. 4, 7
 Кнут Д. 5
 Козак А. А. 107
 Кольман Э. 41
 Кузьмин И. В. 6
 Латышев В. 5
 Латышев Л. 5
 Леонардо да Винчи 4, 7
 Леонардо из Пизы (Фибоначчи) 4, 16, 17, 29
 Лужецкий В. А. 6, 98, 107, 111, 129, 136
 Лука Пачиоли 4
 Мараховский В. Б. 123
 Марутаев М. А. 5
 Матиясевич Ю. В. 5
 Менделеев Д. И. 4, 29
 Моисеев В. И. 136, 142
 Нейгебауэр О. 42, 64
 Обрехт Якоб 4
 Оводенко А. В. 107, 111
 Папернов А. А. 100
 Паскаль Б. 22
 Песчанский В. А. 123
 Петров Б. Н. 7
 Пифагор 4, 7, 25
 Платон 4, 26
 Раков Б. М. 128, 129
 Реньи А. 18, 27
 Розенблюм Л. Я. 123
 Рубин А. Г. 136
 Руставели Шота 5
 Рыжков В. А. 128, 129
 Сабанеев Л. 5
 Сергеев Н. П. 128, 129
 Соколов А. 5
 Соляниченко Н. А. 107
 Стародубцев Н. А. 123
 Стахов А. П. 6, 29, 31, 32, 36, 98, 107, 111, 129, 136, 142
 Тимердинг Г. Е. 3, 5
 Траппель 7
 Уайлд Д. Дж. 5
 Ужвак Ю. Н. 136
 Фехнер 5
 Финкельштейн Р. Л. 123
 Фомичев А. В. 107
 Feinberg M. A. 11
 Харкевич А. А. 121, 126
 Цейзинг 4, 5
 Церетели Г. В. 5
 Цирлин Б. С. 123
 Шекхиханов А. М. 29
 Юдицкий Д. И. 143

	Стр.
Предисловие	. 3
Г л а в а 1. Золотое сечение и числа Фибоначчи	
1.1. Золотое сечение	. 8
1.2. Обобщенная золотая пропорция	13
1.3. Числа Фибоначчи .	16
1.4. Обобщенные числа Фибоначчи.	19
Г л а в а 2. Числа Фибоначчи в математической теории измерения	
2.1. Конструктивные тенденции в математической теории измерения .	25
2.2. Асимметрия измерения.	29
2.3. Конструктивная модель измерения	32
2.4. "Фибоначчиевы" алгоритмы измерения .	36
Г л а в а 3. "Фибоначчиевы" системы счисления	
3.1. Понятие p -кода Фибоначчи .	42
3.2. Минимальная форма и избыточность p -кодов Фибоначчи	48
3.3. Сложение	53
3.4. Вычитание .	58
3.5. Умножение и деление .	64
Г л а в а 4. Системы счисления с иррациональными основаниями	
4.1. Понятие кода золотой p -пропорции	67
4.2. Изображение натуральных чисел в коде золотой p -пропорции .	71
4.3. Сходство и различие между p -кодами Фибоначчи и кодами золотой p -пропорции .	77
4.4. Перевод чисел из позиционных систем счисления в коды золотой p -пропорции	82
4.5. Диапазоны и формы машинного представления чисел в коде золотой p -пропорции	86
4.6. Особенности операций сложения и вычитания чисел в коде золотой p -пропорции .	92
4.7. Умножение	96
4.8. Деление	99
Г л а в а 5. Коды Фибоначчи и золотой пропорции в цифровой технике	
5.1. Устройство для свертки и развертки кода	103
5.2. Сумматоры и вычитатели.	107
5.3. Быстродействие сумматора	112
5.4. Множительные и делительные устройства.	116
5.5. Техническая интерпретация операций свертки и развертки двоичных разрядов	121
5.6. Применение свойства минимальной формы кода .	125
5.7. Цифро-аналоговые преобразователи .	129
5.8. Аналого-цифровые преобразователи.	136
Заключение.	143
Приложение	145
Список литературы .	147
Именной указатель	150

Алексей Петрович Стахов

КОДЫ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ

Редактор Н. Д. И в а н у ш к о
Художественный редактор Н. С. Ш е и н
Технический редактор А. Н. З о л о т а р е в а
Корректор Н. В. К о з л о в а

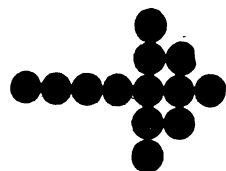
ИБ № 281

Подписано в печать 27.02.84 Т-06643 Формат 60х84/16 Бумага офс. № 2 Гарнитура
"Пресс-роман" Печать офсетная Усл. печ. л. 8,835 Усл. кр.-отт. 9,416. Уч.-изд. л. 8,16
Тираж 10000 экз. Изд. № 19919 Зак. № 220 Цена 40 к.
Издательство "Радио и связь". 101000, Москва, Почтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129041, Москва, Б. Переяс-
лавская ул., д. 46

Настоящая серия печатается по рекомендации IX Международного Совещания руководителей научно-технических издательств социалистических стран (июнь 1975). В серии участвуют:

Издательство «Советское радио» (СССР)
Издательство технической литературы (ВНР)
Издательство «Техника» (ГДР)
Издательство научно-технической литературы (ЧССР)



45 к.



В серии «КИБЕРНЕТИКА»
выйдут в свет следующие книги:

- | | |
|------------------|---|
| Яглом И. М. | Булева структура и ее модели |
| Фейнберг Е. Л. | Искусство в кибернетизированном мире |
| Мартиросов С. М. | Бионасосы — роботы клетки! |

Предварительный заказ на указанные книги
Вы можете оформить в магазинах,
распространяющих литературу по данной тематике

